Линейный ответ для хаотических отображений малой регулярности

Евгений Тодоров (Санкт-Петербург)

Введение

Теория хаотических динамических систем — активно развивающаяся область в математике, имеющая много приложений в различных науках.

Динамические системы возникают во многих научных дисциплинах при моделировании процессов, изменяющих своё состояние с ходом времени. Важный их класс, связанный со статистической физикой, — хаотические динамические системы. Математический анализ поведения данных систем бурно развивается со второй половины $\overline{\underline{XX}}$ века. В частности, для некоторых дискретных динамических систем гладкости C^3 на окружности было доказано наличие одного важного свойства — линейного ответа (дифференцируемой зависимости статистического поведения системы от параметра). В данной работе изучается наличие этого же свойства в ситуации малой регулярности, а именно — для растягивающего отображения гладкости $C^{1+\alpha}$ на окружности.

1 Основные определения и используемые результаты

Рассмотрим M — гладкое многообразие (нас будет инересовать случай, когда $M = S^1$, где S^1 — окружность длины 1 со стандартной метрикой — длиной дуги) и $f : M \to M$.

Определение 1.1. *Отображение f будет называться (дискретной) динамической системой на M.*

Нас будут интересовать орбиты точек, то есть множества вида $\{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, где $x \in M$, причём $f^0(x) = x$. Пусть Σ — борелевская сигма-алгебра на M.

Определение 1.2. *Мера μ называется наблюдаемой (физической, Синая-Рюэля-Боуэна) мерой для динамической системы $f : M \to M$, если:*

1. *μ — борелевская вероятностная мера на M;*
2. *$\forall A \in \Sigma \quad \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ (инвариантность);*
3. *$\forall \varphi : M \to \mathbb{R}$ такой, что φ–непрерывна на M, и для почти каждого (по мере Лебега на M) x выполнено:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x)) \to \int\limits_M \varphi(x)d\mu, \quad n \to \infty.$$

Пусть существует μ — физическая мера.

Определение 1.3. *Динамическую систему f, заданную на гладком многообразии M, будем называть хаотической, если:*

1. *f неустойва по Ляпунову, то есть $\forall x, y \in M$ и $\forall Q$ такого, что $0 < Q < diam(M)$, существует бесконечно много $N \in \mathbb{N}_0$, таких, что:*
$$|f^N(x) - f^N(y)| > Q;$$
2. *на M существует физическая мера μ для системы f.*

Определение 1.4. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Функцию f будем называть α−гёльдеровой в точке x с оптимальной гёльдеровой константой $K_\alpha(f,x)$, если:*

$$K_\alpha(f,x) = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \sup_{|x-y|<\delta} \frac{sign(x-y)(f(x)-f(y))}{|x-y|^\alpha}.$$

Определение 1.5. *Будем назвать f α−гёльдеровой всюду, если она α−гёльдерова в каждой точке M, а оптимальные гёльдеровы константы ограничены.*

Рассмотрим $\{f_t\}_{t\in[-1,1]}$ — семейство отображений $M \to M$ таких, что для каждого t f_t обладает физической мерой μ_t.

Определение 1.6. *Пространством $C^{1+\alpha}(M \to M)$ будем называть множество $C^{1+\alpha}$−гладких функций, отображающих M в M.*

Пусть $dist$ — метрика на пространстве $C^{1+\alpha}(M \to M)$.

Определение 1.7. *Пусть $\theta : t \mapsto f_t$. Будем рассматривать θ, как отображение между метрическими пространствами: $[0,1]$ со стандартной метрикой на нём и $C^{1+\alpha}(M)$ с метрикой $dist$. Тогда будем говорить, что семейство $\{f_t\}_{t\in[-1,1]}$ непрерывно параметризовано, если θ непрерывно.*

Определение 1.8. *Рассмотрим $\tau : t \mapsto \int\limits_M \varphi(x) d\mu_t$, как функцию, отображающую $[-1,1]$ в $\mathbb{R}$. Будем говорить, что непрерывно параметризованное семейство $\{f_t\}_{t\in[-1,1]}$ обладает линейным ответом, если соответствие τ дифференциируемо в 0.*

Определение 1.9. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Пусть f, g — дифференциируемые функции, отображающие M в себя, такие, что f', g' α−гёльдеровы. $C^{1+\alpha}$−метрикой будем называть функцию $dist_{1+\alpha} : C^{1+\alpha}(M \to M) \times C^{1+\alpha}(M \to M) \to \mathbb{R}$, такую, что:*

$$dist_{1+\alpha}(f,g) = \sup_{x\in M}(f(x) - g(x)) + \sup_{x\in M}(K_\alpha(f,x) - K_\alpha(g,x)).$$

Заметим, что наличие линейного ответа доказано для отображения гладкости C^3. Этот факт подробно изложен в [3]. Ожидается, что аналогичные методы, с привлечением некоторых других, верны и для $C^{2+\alpha}$.

2 Постановка задачи

Гладкости $1+\alpha$ достаточно для существования физической меры μ на динамической системе f (доказательство этого факта приведено в [1]).

Будем рассматривать отображения окружности S^1 в себя.

Замечание 2.1. *Заметим, что S^1 изометрична профакторизованному отрезку [0, 1], то есть, $S^1 \simeq [0,1]_{/\sim}$, где отношение эквивалентности $\sim$ просто «склеивает» концы отрезка.*

Определение 2.2. *Умножением окружности на целое число m ($m \geq 2$) будем называть отображение $E_m : [0,1] \to [0,1]$ такое, что $\forall x \in [0,1] \quad E_m(x) = \{mx\}$.*

Рассмотрим E_m. Данное отображение, как известно, обладает гладкостью C^∞. Тогда «испортим» его, добавив к нему функцию g такую, что $(E_m+g)C^{1+\alpha}$. То есть, у функции g есть первая производная g', которая гёльдерова всюду с одинаковым показателем, не большим, чем α. Одним из широко известных примеров такой функции является *функция Вейерштрасса.*

Определение 2.3. *Функцией Вейерштрасса $w(x)$ будем называть отображение следующего вида:*

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k 2\pi x),$$

где $b > 1$, $0 < a < 1$ и $ab > 1$.

В качестве «добавночной» функции g возьмём первообразную к w, тогда, с учётом прежних ограничений на a и b, имеем:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{b^k} \cos(a^k 2\pi x).$$

Рассмотрим E_3 — утроение окружности, то есть $\forall x \in [0,1] E_3(x) = \{3x\}$. Тогда исследуем функцию следующего вида:

$$\forall x \in [0,1], \forall t \in [-1,1] \quad f_t = E_3(x) + \frac{1}{100} t g(3x) = \{3x\} + \frac{1}{200\pi} t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{b^k} \cos(a^k 6\pi x).$$

Основной задачей данной работы является проверить наличие линейного ответа для отображения из семейства $\{f_t\}_{t\in[-1,1]}$. Это может быть установлено на основании ограниченности и сходимости *ньютонывых частных эргодических средних* при изменении параметра t вдоль большого отрезка траектории.

3 Основные результаты

Результаты численного эксперимента демонстрируют для утроения окружности, возмущённого функцией Вейерштрасса, и наблюдаемой $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{29} 3^{-k} |x - \frac{1}{7}|^{-\frac{7}{10}}$ ограниченность и сходимость ньютонывых частных эргодических средних при малом изменении параметра t вдоль большого отрезка траектории.

4 Вспомогательные результаты

Лемма 4.1. *Функция f является растягивающим отображением окружности.*

Лемма 4.2. *Семейство $\{f_t\}_{t\in[-1,1]}$ будет непрерывно параметризованным при $C^{1+\alpha}$–метрике.*

5 Доказательство

В целях решения задачи мы проводим численный эксперимент, используя математический пакет *Sage* со встроенной функцией *MPComplexField* из библиотеки *The GNU Multiple Precision Complex Library.*

Для доказательства были взяты утроение окружности, конкретные $a = \frac{3}{5}$ и $b = 5$ в функции Вейерштрасса, несколько различных значений параметра t, наблюдаемая $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{29} 3^{-k}|x - \frac{1}{7}|^{-\frac{7}{10}}$. При таких значениях было замечено, что ньютоновы частные эргодических средних вдоль быльшого отрезка траектриии (было рассмотрено 10^9 итераций) ограничены и сходятся.

Список литературы

[1] Каток А. Б., Хасселблат Б., «Введение в современную теорию динамических систем», М.: Факториал, 1999.

[2] G. H. Hardy. «Weierstrass's non-differentiable function», Trans. Amer. Math. Soc., 17(3):301–325, 1916.

[3] Viviane Baladi, «Linear Response, Or Else», Ecole Normale Sup´erieure, 2014

Лаборатория Непрерывного Математического Образования, 2016.