Взаимосвязь коммутаторной длины в группе и её групповом кольце

Максим Вагнер и Павел Соликов, г. Санкт-Петербург
Зайковский Анатолий Александрович

1 Введение.

Пусть G —- группа и $[G,G]$ —- её коммутант, то есть группа, порождённая коммутаторами $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$. Тогда любой элемент из коммутанта представляется в виде произведения коммутаторов. Наименьшее число коммутаторов необходимое для представления элемента $g \in [G,G]$ называется коммутаторной длиной g и обозначается через $Cl(g)$. Например, если $G = F(x,y)$ —- свободная группа на двух буквах, то $Cl([x,y][x^{-1},y^{-1}]) = 1$ и $Cl([x,y]^3) \le 2$ потому, что имеют место равенства:

$$[x,y][x^{-1},y^{-1}] = [yx^2, {}^{yx}y], \qquad [x,y]^3 = [x^{-1}yx, x^{-2}yxy^{-1}][yxy^{-1}, y^2].$$

На самом деле, $Cl([x,y]^3) = 2$ и более того $Cl([x,y]^n) = [n/2] + 1$, где $[n/2]$ обозначает целю часть числа $n/2$ (см.[1]).

Явное вычисление коммутаторной длины в группах —- это трудоёмкий процесс. Более того, многие естественные теоретические вопросы о коммутаторной длине до сих пор открыты. Даже для свободной группы $F = F(x,y)$. Например, есть теорема о том, что существует элемент $w \in [F,F]$ такой, что $Cl(w^2) < Cl(w)$, но явно этот элемент не построен. Как и во многих подобных случаях, всё гораздо проще, если заменить группы на более "линейные"структуры, такие как ассоциативные кольца, ассоциативные алгебры или алгебры Ли.

Цель нашей работы заключается в создании аппарата для перенесения работы с обычной коммутаторной длиной из группы G в групповое кольцо $\mathbb{Z}G$. Мы даём эквивалентное определение коммутаторной длины для элемента из $[G,G]$, которое не использует понятие коммутатора в группе, но использует понятие кольцевого коммутатора в групповом кольце.

Сформулируем строго наш основной результат. Пусть G — произвольная группа. Для двух элементов x,y из группового кольца $\mathbb{Z}G$ обозначим через $[x,y]_{\mathsf{rng}}$ их кольцевой коммутатор

$$[x,y]_{\mathsf{rng}} = xy - yx.$$

Можно доказать, что для любого элемента $g \in [G,G]$ существуют такие $g_i, h_i, f_i \in G, 1 \le i \le n$ что

$$g - 1 = g_1[h_1, f_1]_{\mathsf{rng}} + \cdots + g_n[h_n, f_n]_{\mathsf{rng}}.$$

Наименьшее такое n назовём кольцевой коммутаторной длиной g и обозначим через $Cl_{\mathsf{rng}}(g)$. Цель нашей работы доказать, что для любого $g \in [G,G]$. Имеет место равенство

$$Cl(g) = Cl_{\mathsf{rng}}(g).$$

Таким образом, кольцевая коммутаторная длина совпадает с обычной, и это лишь другое определение известного объекта.

Доказанное нами эквивалентное определение полезно тем, что теперь "кирпичики"из которых всё "собирается"уже не умножаются в (некоммутативной) группе, а складываются в групповом кольце. Поэтому не нужно заботиться о том, в каком порядке мы их расставим. Мы надеемся, что преимущества этого определения дадут ряд продвижений в общей теории коммутаторной длины.

2 Основные определения и используемые результаты.

- Пусть G — группа с порождающим ее множеством S. Тогда $G = \langle S \rangle$
- Пусть G — группа. Тогда её **групповым кольцом** называется следующее множество конечных формальных сумм

  $$\mathbb{Z}G = \{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i \mid k \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ g_i \in G\}.$$

  Хорошо известно, что $\mathbb{Z}G$ является свободной абелевой группой относительно сложения, а также обладает ассоциативностью умножения и дистрибутивностью.

- Назовём **аугментацией** отображение $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, которое действует следующим образом:

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Легко проверить, что ε является гомоморфизмом. Тогда **аугментационным идеалом** назовём идеал $I = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$, то есть множество

$$I = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i \mid n \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ g_i \in G,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\right\}.$$

- Пусть G группа и $h, k \in G$. **Коммутатором элементов** h и k называется элемент $[h,\ k] = h^{-1}k^{-1}hk$. **Коммутантом группы** G называется группа, порождённая множеством всех коммутаторов элементов из G, обозначаемая через $[G, G]$.

- Пусть R кольцо, I - его двусторонний идеал и $h, k \in I$. **Коммутатором элементов** h и k называется элемент $[h,\ k]_{\mathsf{rng}} = hk - kh$.

- **Коммутантом идеала** I кольца R называется идеал, порожденный множеством коммутаторов всех элементов из I, обозначаемый через $[I,\ I]_{\mathsf{rng}}$.

- Пусть G группа и $g \in [G,\ G]$. **Коммутаторной длиной элемента** g назовем число $Cl(g)$ равное минимальному количеству коммутаторов, с помощью произведения которых представим g.

- Пусть G группа, а I аугментационный идеал в кольце $R = \mathbb{Z}G$. **Коммутаторной кольцевой длиной элемента** $r \in [I,\ I]_{\mathsf{rng}}$ назовем число

$$Cl_R(r) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid r = \sum_{i=1}^{n} a_i [b_i, c_i],\ a_i, b_i, c_i \in G\}.$$

- Пусть G группа и $[G,\ G]$ её коммутант. Назовём **абелизацией** группы G факторгруппу

$$G_{ab} = G/_{[G,\ G]}.$$

- Определим **произведение идеалов** следующим образом:

$$I \cdot J = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in I,\ b_i \in J\right\}.$$

3 Постановка задачи.

Пусть G группа, а I аугментационный идеал в кольце $R = \mathbb{Z}G$. Идея данной работы заключается в том, чтобы доказать или опровергнуть следующие утверждения, связывающих понятие групповой и кольцевой коммутаторной длины:

1. если $g \in [G,\ G]$, то $g - 1 \in [I,\ I]_{\mathsf{rng}}$;
2. если $Cl(g) = 1$, то $Cl_R(g - 1) = 1$;
3. $Cl(g) \geq Cl_R(g - 1)$;
4. $Cl(g) \leq Cl_R(g - 1)$.

4 Основные результаты.

Пусть G группа, а I аугментационный идеал в кольце $\mathbb{Z}G$. В этой работе приведено доказательство всех пунктов поставленной задачи. Описано конкретное разложение элемента $g - 1$ в коммутанте $[I,\ I]_{\mathsf{rng}}$, основанное на разложении элемента g в $[G,\ G]$. Длина исходного разложения при этом сохраняется.

5 Вспомогательные результаты.

Пусть G группа, а I аугментационный идеал в кольце $\mathbb{Z}G$.

Утверждение 5.1. *Пусть G_{ab} абелизация группы G. Тогда*

$$^{I}/_{I^2} \simeq G_{ab}.$$

Утверждение 5.2. *Идеал I пораждается элементами вида $g-1$, где $g \in G$ как абелева подгруппа. Таким образом,*

$$I = \langle \{g-1 \mid g \in G\} \rangle.$$

Утверждение 5.3. *Пусть G пораждается элементами множества S, то есть $G = \langle S \rangle$. Тогда*

$$I = \langle \{g-1 \mid g \in S\} \rangle.$$

Тем самым, достаточно порождающих группы G, чтобы получить в точности аугментационный идеал I.

Пусть $r, s \in R$. Очевидны следующие свойства кольцевого коммутатора:

- $t[r,\ s]_{\mathsf{rng}} = [tr,\ s]_{\mathsf{rng}} + [s,\ t]_{\mathsf{rng}} r$
- $[I,\ I]_{\mathsf{rng}} = [\mathbb{Z}G,\ \mathbb{Z}G]$
- $[r,\ s]_{\mathsf{rng}} = -[s,\ r]_{\mathsf{rng}}$
- $[r_1 + r_2,\ s]_{\mathsf{rng}} = [r_1,\ s]_{\mathsf{rng}} + [r_2,\ s]_{\mathsf{rng}}$
- $[1,\ s]_{\mathsf{rng}} = 0$

Лемма 5.4. *Для любого элемента $g \in G$ следующие условия эквивалентны:*

1. $g \in [G,\ G]$;
2. $g - 1 \in I^2$.

6 Доказательства основных и вспомогательных результатов.

Пусть G группа, а I аугментационный идеал в кольце $R = \mathbb{Z}G$.

Лемма 6.1. *Для любого элемента $g \in G$ следующие условия эквивалентны:*

1. $g \in [G,\ G]$;
2. $g - 1 \in I^2$.

Доказательство. Это получается тотчас, если доказать включение $[I,\ I]_{\mathsf{rng}} \subseteq I^2$. Для этого фиксируем $[g,\ h]_{\mathsf{rng}} \in [I,\ I]_{\mathsf{rng}}$. Тогда

$$[g,\ h]_{\mathsf{rng}} = gh - hg = (g-1)(h-1) - (h-1)(g-1) \in I^2.$$

Тем самым, если $x \in [I,\ I]_{\mathsf{rng}}$, то $x = \sum_{i=1}^{n} g_i [h_i,\ k_i]_{\mathsf{rng}}$. □

Утверждение 6.2. *Пусть G группа, а I аугментационный идеал в кольце $\mathbb{Z}G$. Тогда*

$$^{I}/_{I^2} \simeq G_{ab},$$

где $I^2 = I \cdot I$.

Доказательство. Покажем, что отображение $\varphi : G \to I$ такое, что $\varphi(g) = g-1$, является гомоморфизмом. Действительно, проверим основное свойство гомоморфизма:

$$\varphi(g * h) = g * h - 1 = (g-1) * (h-1) + (g-1) + (h-1) = (g-1) + (h-1) = \varphi(g) + \varphi(h).$$

Равенство

$$(g-1) * (h-1) + (g-1) + (h-1) = (g-1) + (h-1)$$

выполнено, так как элемент $(g-1) * (h-1)$ принадлежит I^2, следовательно, в факторе ${}^{I}/_{I^2}$ он равен нулю.'

Рассмотрим следующую диаграмму (слева — на языке множеств, справа — на языке элементов):

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \\ & {}^{I}/_{I^2} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & f(g) \\ & g-1 \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

из которой будет следовать эквивалентность фактора ${}^{I}/_{I^2}$ и абелизации G_{ab}.

Докажем единственность ψ для каждого f. Для этого возьмём $g \in G$. Его образ $\varphi(g) = g-1$. Допустим противное. Пусть существуют два отображения ψ_1 и ψ_2 таких, что $\psi_1 \circ \varphi = f =' \psi_2 \circ \varphi$. Из выполнения равенства $\psi_1(g-1) = f(g) = \psi_2(g-1)$ на всём множестве G следует равенство $\psi_1 = \psi_2$. □

Тем самым,

$$x \in [I,\ I]_{\mathsf{rng}} \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} t_i [r_i,\ s_i]_{\mathsf{rng}},\ t_i \in G,\ r_i,\ s_i \in I.$$

Теорема 6.3. *Пусть $g \in [G,\ G]$. Тогда $g-1 \in [I,\ I]_{\mathsf{rng}}$.*

Доказательство. Будем говорить, что $P(n)$ истинно, если утверждение теоремы верно для любого элемента $g \in [G,\ G]$, который представляется в виде произведения n коммутаторов элементов из G. Проведем индукцию по длине n взятого элемента $g \in [G,\ G]$. Покажем истинность $P(1)$. Действительно, если g представляется в виде коммутатора $[h,\ k]$, где $h,\ k \in G$, то

$$g-1 = [h,\ k] - 1 = h^{-1}k^{-1}hk - 1 = h^{-1}k^{-1}(hk - kh) = h^{-1}k^{-1}[h,\ k]_{\mathsf{rng}},$$

тем самым $P(1)$ истинно.

Пусть $P(n)$ истинно. Докажем истинность $P(n+1)$. Пусть

$$g = \prod_{i=1}^{n+1} [h_i,\ k_i].$$

Тогда

$$g - 1 = g - \prod_{i=1}^{n}[h_i,\ k_i] + \prod_{i=1}^{n}[h_i,\ k_i] - 1 = \prod_{i=1}^{n+1}[h_i,\ k_i] - \prod_{i=1}^{n}[h_i,\ k_i] + \prod_{i=1}^{n}[h_i,\ k_i] - 1 =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}[h_i,\ k_i]\left([h_{n+1},\ k_{n+1}] - 1\right) + \left(\prod_{i=1}^{n}[h_i,\ k_i] - 1\right) = \prod_{i=1}^{n}[h_i,\ k_i]\left(h_{n+1}^{-1}k_{n+1}^{-1}[h_{n+1},\ k_{n+1}]\right) + \left(\prod_{i=1}^{n}[h_i,\ k_i] - 1\right),$$

тогда первое слагаемое принадлежит коммутанту идеала I по лемме, второе слагаемое принадлежит коммутанту I по индукционному предположению, и истинность $P(n+1)$ вытекает из истинности утверждения по индукционному предположению для каждого из слагаемых.

Легко понять, что $g-1$ в точности является такой суммой:

$$g - 1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\prod_{j=1}^{i-1}[h_j, k_j]\right) h_i^{-1}k_i^{-1}[h_i, k_i]_{\mathsf{rng}}\right).$$

Действительно, раскрыв сумму и сократив лишнее, останется лишь два слагаемых - $\prod\limits_{i=1}^{n+1}[h_i, k_i]$ (другими словами, g) и -1. □

Теорема 6.4. *Пусть $Cl(g) = 1$. Тогда $Cl_R(g-1) = 1$.*

Доказательство. Пусть $g \in G$ такой, что $Cl(g) = 1$. Тогда g может быть представлен как

$$g = (h^{-1}k^{-1})[h,\ k]_{\mathsf{rng}}$$

(см. $P(1)$ индукции, представленной в первом пункте решения).
Остаётся доказать, почему $Cl_R(g-1) \neq 0$. Допуская противное, получаем, что $g - 1 = 0$, то есть $g = 1$. Но тогда $Cl(g) = 0$, что противоречит условию. Тем самым, $Cl_R(g-1) = 1$. □

Теорема 6.5. *Для любого $g \in [G, G]$ справедливо*

$$Cl(g) \geq Cl_R(g-1).$$

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из результата, полученного при доказательстве первого утверждения. Если g - элемент коммутанта группы G и его коммутаторная длина $Cl(g)$ равна n, тогда элемент $g-1$ раскладывается в сумму из n слагаемых, откуда следует требуемое неравенство. □

Теорема 6.6. *В данном пункте требуется доказать то, что разложив $g-1$ по первой теореме, мы не сможем сократить полученную сумму ни на одно слагаемое.*

Доказательство. Напомним, что решением уравнения $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = W$, где $w_i \in G$, $W \in G$, является $w_j = W \& \sum\limits_{i \neq j} w_i = 0$. Заметим, что для разрешимости уравнения $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = W$ необходимо навесить условие, что n нечётно.

Лемма 6.7. *Если $g - 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i [h_i',\ k_i']_{\mathsf{rng}}$, где $n = Cl_{\mathsf{rng}}(-1)$, то решение уравнения задаётся цепью из n равенств.*

Доказательство. Обозначим за b_i элемент $a_i h_i' k_i'$, а за c_i элемент $-a_i k_i' h_i'$. Получаем $g - 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i + c_j)$, что эквивалентно $g = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i + c_j)$. Лемма утверждает, что можно так переобозначить индексы, что будут выполнены равенства (такую последовательность равенств будем называть цепью):

$$1 + x_{i_1} = 0$$

$$y_{i_1} + x_{i_2} = 0$$

$$y_{i_2} + x_{i_3} = 0$$

$$\ldots$$

$$y_{i_{n-1}} + x_{i_n} = 0,$$

где либо $x_i = b_i$ и $y_i = c_i$, либо $x_i = c_i$ и $y_i = b_i$. y_{i_n} будем называть свободным членом цепи.

Допустим противное. Что значит, что такой цепи не образовалось, а равенство всё-таки выполнилось? Это значит, что на каком-то шаге y_{i_j}, $j \neq n$, не вошёл ни в одно из равенств, а значит, $g = y_{i_j}$. Из того, что сумма прервалась на следует, что

$$\sum_{p \neq i_z,\ z = \overline{1,\ j}} a_p [h_p',\ k_p']_{\mathsf{rng}} = 0,$$

то есть

$$g - 1 = \sum_{i=1}^{n} a_i [h_i', k_i']_{\mathsf{rng}} = \sum_{z=1}^{j} a_{i_z} [h_{i_z}',\ k_{i_z}']_{\mathsf{rng}} + \sum_{p \neq i_z,\ z = \overline{1,\ j}} a_p [h_p',\ k_p']_{\mathsf{rng}} = \sum_{z=1}^{j} a_{i_z} [h_{i_z}',\ k_{i_z}']_{\mathsf{rng}}.$$

Получаем, что $Cl_{\mathsf{rng}}(-1) = j < n$; получили противоречие. □

Лемма 6.8. *Пускай у нас есть цепь, задающая решение уравнения* $g - 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i[h'_i,\ k'_i]_{\mathsf{rng}}$, *где* $n = Cl_{\mathsf{rng}}(-1)$. *Утверждается, что тогда свободный член цепи представляется в виде произведения* n *групповых коммутаторов.*

Доказательство. Воспользуемся методом индукции.
1. Докажем $P(1)$:
$1 + x_{i_1} = 0$ и требуется доказать, что y_{i_1} представляется в виде группового коммутатора. Рассмотрим 2 случая: когда $x_{i_1} = b_{i_1}$ и когда $x_{i_1} = c_{i_1}$.

1)$x_{i_1} = b_{i_1}$, тогда $1 + a_{i_1} h'_{i_1} k'_{i_1} = 0$. Отсюда получаем, что $a_{i_1} = -{k'_{i_1}}^{-1} {h'_{i_1}}^{-1}$. Значит, свободный член цепи y_{i_1} равен

$$c_{i_1} = -a_{i_1} k'_{i_1} h'_{i_1} = -(-{k'_{i_1}}^{-1} {h'_{i_1}}^{-1}) k'_{i_1} h'_{i_1} = [k'_{i_1},\ h'_{i_1}].$$

2)$x_{i_1} = c_{i_1}$, тогда $1 - a_{i_1} k'_{i_1} h'_{i_1} = 0$. Отсюда получаем, что $a_{i_1} = {h'_{i_1}}^{-1} {k'_{i_1}}^{-1}$. Значит, свободный член цепи y_{i_1} равен

$$b_{i_1} = a_{i_1} h'_{i_1} k'_{i_1} = {h'_{i_1}}^{-1} {k'_{i_1}}^{-1} h'_{i_1} k'_{i_1} = [h'_{i_1},\ k'_{i_1}].$$

2. $P(n)$ выполнено. Докажем, что выполняется $P(n+1)$:
Имеем цепь

$$1 + x_{i_1} = 0$$

$$y_{i_1} + x_{i_2} = 0$$

$$y_{i_2} + x_{i_3} = 0$$

$$\ldots$$

$$y_{i_n} + x_{i_{n+1}} = 0.$$

Из условия выполнения $P(n)$ имеем, что y_{i_n} представляется в виде произведения n групповых коммутаторов.
$y_{i_n} + x_{i_{n+1}} = 0$ и требуется доказать, что $y_{i_{n+1}}$ представляется в виде произведения $n+1$ группового коммутатора. Рассмотрим 2 случая: когда $x_{i_{n+1}} = b_{i_{n+1}}$ и когда $x_{i_{n+1}} = c_{i_{n+1}}$.

1)$x_{i_{n+1}} = b_{i_{n+1}}$, тогда $y_{i_n} + a_{i_{n+1}} h'_{i_{n+1}} k'_{i_{n+1}} = 0$. Отсюда получаем, что $a_{i_{n+1}} = -y_{i_n} {k'_{i_1}}^{-1} {h'_{i_1}}^{-1}$. Значит, свободный член цепи $y_{i_{n+1}}$ равен

$$c_{i_1} = -a_{i_{n+1}} k'_{i_1} h'_{i_1} = -(-y_{i_n} {k'_{i_1}}^{-1} {h'_{i_1}}^{-1}) k'_{i_1} h'_{i_1} = y_{i_n}[k'_{i_1},\ h'_{i_1}].$$

Получили произведение элемента, представляющегося в виде произведения n групповых коммутаторов на групповой коммутатор, другими словами произведение $n+1$ группового коммутатора.

1)$x_{i_{n+1}} = 23:14:13 c_{i_{n+1}}$, тогда $y_{i_n} - a_{i_{n+1}} k'_{i_{n+1}} h'_{i_{n+1}} = 0$. Отсюда получаем, что $a_{i_{n+1}} = y_{i_n} {h'_{i_1}}^{-1} {k'_{i_1}}^{-1}$. Значит, свободный член цепи $y_{i_{n+1}}$ равен

$$b_{i_1} = a_{i_{n+1}} h'_{i_1} k'_{i_1} = y_{i_n} {h'_{i_1}}^{-1} {k'_{i_1}}^{-1} h'_{i_1} k'_{i_1} = y_{i_n}[h'_{i_1},\ k'_{i_1}].$$

□

Лемма 6.9. $Cl_{\mathsf{rng}}(g-1) \nless Cl(g)$

Доказательство. Допуская, что $Cl_{\mathsf{rng}}(g-1) < Cl(g)$, получаем $g - 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i[h'_i, k'_i]_{\mathsf{rng}}$, где $n = Cl_{\mathsf{rng}} < Cl(g)$. Решая уравнение $g = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i[h'_i, k'_i]_{\mathsf{rng}}$, получаем, что g равняется остаточному члену, который по предыдущей лемме представляется в виде произведения n групповых коммутаторов. Но это значит, что $n = Cl_{\mathsf{rng}}$. Противоречие. □

Это утверждение аналогично тому, что $Cl_{\mathsf{rng}}(g-1) \geq Cl(g)$ $\square$

Тогда получаем, что с одной стороны $Cl_{\mathsf{rng}}(g-1) \leq Cl(g)$, а с другой – $Cl_{\mathsf{rng}}(g-1) \geq Cl(g)$. Получаем необходимое равенство.

Список литературы

[1] M. Culler, Using surfaces to solve equations in free groups, Topology, v.20(2), 1981

[2] Браун К.С. Когомологии групп, Москва, издательство Наука, 1987.

[3] Бардаков В.Г., Вычисление коммутаторной длины в свободных группах, Сибирский фонд алгебры и логики, 2000.