О сравнении гладкости внешней функции и её модуля

Даниил Плаксин, Иван Фокин (Санкт-Петербург, Россия)

1 Введение.

В работе изучаются гладкие свойства аналитических функций в единичном круге. А именно, рассматривается классическая задача о сравнении гладкости аналитической функции и гладкости ее модуля граничных значений. Нас будет интересовать только частный случай, когда аналитическая функция является внешней, т.е. в каноническом разложении данной функции на сомножители отсутствует произведение Бляшке и сингулярный сомножитель (см. [1] для подробностей, касающихся канонического разложения). Опорным результатом в данном круге задач по праву является обобщение теоремы Привалова-Зигмунда, полученное В.П. Хавиным в [2], позволяющее заключить, что гладкость внешней функции в целом ведет себя в «2 раза хуже» чем гладкость модуля ее граничных значений. Более того, в дальнейшем удалось установить (см. [4]), что некоторые дополнительные условия на логарифм модуля граничных значений внешней функции позволяют падение гладкости уменьшить, а то и вовсе его избежать. Именно это обстоятельство и подтолкнуло нас к поиску условий, описывающих падение гладкости фиксированной пропорции.

2 Основные обозначения и используемые результаты.

Замечание 2.1. *Когда необходимо интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. Более того, ниже мы по мере необходимости будем отождествлять функции на окружности с их 2π–периодическими версиями на прямой.*

Определение 2.2. *Пусть задана неотрицательная 2π–периодичная функция φ. Предположим, что $\log\varphi$ из $L^1(\mathbb{T})$, тогда внешней функцией для неё будет являться*

$$\mathcal{O}_\varphi(z) = exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{log\varphi(\xi)}{\xi - z}d\xi\right).$$

Определение 2.3. *Значения оператора гармонического сопряжения H на суммируемой на окружности функции f заданы по формуле:*

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{s-t}{2}\right) f(s)ds.$$

Замечание 2.4. *Граничные значения внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ можно выразить следующим образом (см. [1]):*

$$\mathcal{O}_\varphi(x) = \varphi(x) exp(iHlog\varphi(x)),$$

где H – оператор гармонического сопряжения.

Замечание 2.5. *Известно, что $H : L^p \to L^p$ является ограниченным оператором, то есть для любой $f \in L^p$ выполнено $\| Hf \|_{L^p} \leq C_p \cdot \| f \|_{L^p}$.*

Определение 2.6. *Функция Φ на полуоси $[0, \infty)$ называется квазивогнутой, если выполнены следующие условия:*

1. $\Phi(0) = 0$;
2. $\Phi(t)$ *положительна и возрастает при* $t > 0$;
3. $\frac{\Phi(t)}{t}$ *убывает при* $t > 0$.

Определение 2.7. *Неубывающей перестановкой f^* функции f по мере μ является*

$$f^* = inf\{t; \quad \mu\{|f| > t\} \leq s\}.$$

Определение 2.8. *Пусть задана некоторая квазивогнутая функция Φ. Пространство Лоренца $\Lambda(\Phi)$ состоит из всех таких измеримых функций f, для которых*

$$\|f\|_{\Lambda(\Phi)} = \int\limits_0^\infty f^*(s) d\Phi(s) < \infty.$$

Замечание 2.9. *Пространства Лоренца являются естественным обобщением пространств Лебега L^p. Более того, для пространств Лоренца выполнен аналог неравенства Гёльдера:*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{\Lambda(\Phi)} \|g\|_{\Lambda(\Phi')},$$

по всем $f \in \Lambda(\Phi)$ и $g \in \Lambda(\Phi')$, здесь $\Phi'(t) = t/\Phi(t)$.

Определение 2.10. *Функция $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ называется мажорантой типа модуля непрерывности, если: $\omega(x) = 0$, только при $x = 0$; ω квазивогнута; ω удовлетворяет условиям регулярности*

$$\forall \delta > 0 \quad \int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u} du \leq C_1^\omega \omega(\delta); \quad \delta \int_\delta^{2\pi} \frac{\omega(u)}{u^2} du \leq C_2^\omega \omega(\delta). \qquad \text{(RG)}$$

Определение 2.11. *Будем говорить, что функция f принадлежит классу Гёльдера Lip_ω с мажорантой типа модуля непрерывности ω, если для любых $x \neq y$ выполнено*

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\omega \omega(|x - y|).$$

Определение 2.12. *Средней осцилляцией функции f на промежутке I является*

$$\Omega_p(f,I) = \inf_c \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f-c|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Замечание 2.13. *Оказывается, что принадлежность функции классу Гёльдера можно описать в терминах средних осцилляций. А именно (см. [3]), если $\Omega_p(f,I) \le \omega(|I|)$ по всем промежуткам I, тогда можно выбрать выбрать такого представителя класса $[f]$, который будет непрерывным и его модуль непрерывности допускает такую оценку $\omega_f(\delta) \le C\omega(\delta)$ при достаточно малых δ.*

3 Постановка задачи.

Дана неотрицательная 2π–периодичная функция φ, для которой $\log\varphi \in L^1$. Рассмотрим её внешнюю функцию $\mathcal{O}_\varphi$ с граничными значениями, равными φ.

Известно (см. [4]), что условие $\varphi \in Lip_\omega$ влечет принадлежность внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ классу Гёльдера с мажорантой $\omega(\sqrt{\cdot})$, тем самым гладкость $\mathcal{O}_\varphi$ упадет в два раза. Заметим, что этот результат нельзя улучшить без дополнительных ограничений на $log\varphi$. Более того (см. [4]), если наложить более сильное условие $\log\varphi \in L^p$, то априорное падение гладкости в два раза удается уменьшить, а точнее гладкость внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ будет в $1+1/p$ раз хуже, чем гладкость функции φ.

Основной задачей работы является получение условий на $log\varphi$, позволяющих утверждать, что $\mathcal{O}_\varphi$ принадлежит классу Гёльдера с мажорантой $\omega(R)$, где R заранее известная функция.

В техническом плане, доказательства основных утверждений мы будем проводить опираясь на описание гладких условий в терминах средних осцилляций. Оценки средних осцилляций будем проводить, используя классические методы вещественного анализа.

4 Основные результаты.

Пусть задан показатель R. Рассмотрим квазивогнутую функцию Φ, находящуюся с R в следующем функциональном соотношении:

$$R(x) = (x\Phi(x))^{-1}.$$

Теорема 4.1. *Пусть дана неотрицательная 2π–периодичная функция φ. Пусть $\mathcal{O}_\varphi$ внешняя функция, построенная по φ. Предположим, что $\varphi \in Lip_\omega$. Тогда, если выполнено условие $\log\varphi \in \Lambda(\Phi)$, то при достаточно малых δ имеет место оценка*

$$\omega_{\mathcal{O}_\varphi}(\delta) \le C\omega(R(\delta)),$$

где $\omega_{\mathcal{O}_\varphi}$ обозначает модуль непрерывности $\mathcal{O}_\varphi$, а постоянная C зависит только от ω и $\|\log\varphi\|_{\Lambda(\Phi)}$.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 4.1. Тогда для любой точки x такой, что $\varphi(x) > 0$ существует такое пороговое значение $A = A(x)$, что для всякого промежутка $I \ni x$ имеет место одна из следующих оценок:*

$$\Omega_p(\mathcal{O}_\varphi, I) \leq C\omega(|I|), \quad |I| > A; \tag{1}$$

$$\Omega_p(\mathcal{O}_\varphi, I) \leq C(\omega(|I|) + \omega(R(I))), \quad |I| \leq A; \tag{2}$$

если же $\varphi(x) = 0$, то выполнена первая оценка по всем промежуткам I, вне зависимости от их размера.

5 Доказательства основных результатов.

Без ограничения общности будем рассматривать случаи только в точке ноль. В качестве порогового значения возьмем $A \asymp \omega^{-1}(\varphi(0))$, где ω^{-1} обозначает почти обратную функцию к функции ω. При таком выборе порогового значения A всякий раз, когда $|x| < A$, выполнено неравенство $\varphi(x) > \varphi(0)/2$.

Фиксируем промежуток $I \ni 0$. Оценим среднюю осцилляцию $\Omega_p(\mathcal{O}_\varphi, I)$ внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$. Для любой константы c_0 будет справедливо неравенство

$$\inf_c \left(\frac{1}{|I|}\int_I |\mathcal{O}_\varphi - c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{|I|}\int_I |\mathcal{O}_\varphi - c_0|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда это неравенство выполнено и для $c_0 = \varphi(0)e^{ic_1}$, где

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} ctg\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s)ds.$$

Выполним преобразования и воспользуемся свойством модуля. Имеем,

$$\begin{aligned}|\varphi(x)\cdot e^{iHlog\varphi(x)} - c_0| &\leq |\varphi(x)\cdot e^{iHlog\varphi(x)} - \varphi(0)\cdot e^{iHlog\varphi(x)} + \varphi(0)\cdot e^{iHlog\varphi(x)} - c_0| \leq \\ &\leq |(\varphi(x)-\varphi(0))\cdot e^{iHlog\varphi(x)}| + |\varphi(0)\cdot(e^{iHlog\varphi(x)} - e^{ic_1})|.\end{aligned}$$

Тем самым верна следующая оценка

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\mathcal{O}_\varphi - c_0|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi - \varphi(0)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \varphi(0)\cdot\frac{1}{|I|}\int_I |e^{iHlog\varphi} - e^{ic_1}|.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Первое слагаемое оценится сверху мажорантой $\omega(|I|)$. На данном этапе мы можем сразу получить простую оценку

$$\Omega_p(\mathcal{O}_\varphi, I) \leq \omega(|I|) + 2\varphi(0). \tag{3}$$

Данная оценка позволяет нам ниже ограничится лишь случаем $|I| \le A$. Так как в случае $|I| > A$ оценка (3) влечет

$$\Omega_p(\mathcal{O}_\varphi, I) \le C\omega(|I|).$$

С другой стороны второе слагаемое можно оценить следующим образом. Обозначим через $u = log\varphi - log\varphi(0)$. Нетрудно видеть, что $Hu = Hlog\varphi$, так как $H(const) = 0$. Разобьём

$$u = u\chi_{2I} + u\chi_{\mathbb{R}\setminus 2I} = u_1 + u_2.$$

Тогда второе слагаемое оценится сверху следующим выражением

$$\varphi(0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |Hu_1|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \varphi(0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |Hu_2 - c_1|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь точно также оценим каждое слагаемое. Дадим оценку первому слагаемому, воспользовавшись ограниченностью оператора H. Тогда имеет место следующее неравенство

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |Hu_1|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le |I|^{-\frac{1}{p}} \cdot \| u_1 \|_{L^p} = \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_{2I} |log\varphi - log\varphi(0)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C \cdot \frac{\omega(2|I|)}{\varphi(0)}. \quad (4)$$

Чтобы оценить второе слагаемое, заметим, что

$$\left| ctg\left(\frac{s-x}{2}\right) - ctg\left(\frac{s}{2}\right) \right| \le C\frac{|I|}{s^2}$$

при условии $x \in 2I$ и $s \notin 2I$, тогда

$$| Hu_2 - c_1 | \le C \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus 2I} \frac{|I|}{s^2} | u(s) | ds = C \sum_i \int\limits_{2^{i+1}I\setminus 2^i I} \frac{|I|}{s^2} | u(s) | ds.$$

Разобьём промежутки интегрирования на две части. Первая часть будет содержать такие элементы s, что $\varphi(s) \ge \varphi(0)$, а вторая такие, такие элементы s, что $\varphi(s) < \varphi(0)$. Тогда на первой части интеграл оценится

$$\int\limits_{(2^{i+1}I\setminus 2^i I)\cap\{\varphi(s)\ge\varphi(0)\}} \frac{|I|}{s^2} | u(s) | ds \le \frac{\omega(2^i|I|)}{2^i\varphi(0)} \quad (5)$$

аналогично оценки соотношения (4).

На второй части выполнена оценка (5), если длина $2^{i+1}|I| < A$. Если длина больше порогового значения, то имеет место неравенство

$$|u(s)| \le |log\varphi(s)|,$$

на основании которого можно сделать следующую оценку. Тем самым,

$$\frac{|I|}{(2^{i+1}\mid I\mid)^2}\int\limits_{(2^{i+1}I\setminus 2^iI)\cap\{\varphi(s)<\varphi(0)\}}|u| \;\le\; \frac{|I|}{(2^{i+1}|I|)^2}\int\limits_{2^{i+1}I}|log\varphi| \;\le$$
$$\le \frac{|I|}{(2^{i+1}\mid I\mid)^2}\|log\varphi\|_{\Lambda(\Phi)}\|\chi_{2^{i+1}I}\|_{\Lambda(\Phi')} = \frac{|I|}{(2^{i+1}|I|)^2}\frac{2^{i+1}|I|}{\Phi(2^{i+1}|I|)}\|log\varphi\|_{\Lambda(\Phi)} \le$$
$$\frac{|I|}{A\Phi(A)}\|log\varphi\|_{\Lambda(\Phi)},$$

где $\Phi'(t) = \frac{t}{\Phi(t)}, \quad t > 0.$

Таким образом, окончательно

$$\Omega_p(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \omega(|I|) + C\omega(2|I|) + \sum_i \frac{\omega(2^i|I|)}{2^i} + \sum_i \frac{|I|\varphi(0)}{A\Phi(A)}\|log\varphi\|_{\Lambda(\Phi)}. \tag{6}$$

Таким образом имеется две оценки: (3) и (6). В зависимости от длины промежутка нас будет интересовать одна из этих оценок. Так, если $R(|I|) > A$, то из оценки (3) следует неравенство

$$\Omega_p(\mathcal{O}_\varphi) \le C(\omega(|I|) + C\omega(R(|I|))).$$

Если $R(|I|) \le A$, то из оценки (6), выбора функции Φ и порогового значения A, а также определения квазивогнутости, следует, что

$$|I|\frac{\varphi(0)}{A}\frac{1}{\Phi(A)} \le C\omega(R(|I|)).$$

Последнее завершает доказательство Леммы 4.2. Которая в свою очередь влечет Теорему 4.1.

Авторы работы выражают благодарность аспиранту ПОМИ РАН, преподавателю кафедры высшей математики СПбЭТУ А.Н.Медведеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции.* — М.:Мир, (1984)

[2] В.П.Хавин, *Обобщение теоремы Привалова-Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции.* — Изв. Акад. наук Армянской ССР, серия Математика **6** (1971), 252-258,

[3] S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes.* — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, **19.4** (1965), 593–608.

[4] А.В. Васин, С.В. Кисляков, А.Н. Медведев, *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля.* — Алгебра и анализ, **25.3** (2013).

Лаборатория
Непрерывного Математического Образования.

10 января 2016 года.