Колчаны алгебр некоторых классов групп

Богданов Иван, Вагнер Максим
ГБОУ СОШ №564, г. Санкт-Петербург

1 Введение

Колчаном мы называем конечный ориентированный мультиграф. Каждой конечномерной алгебре над алгебраически замкнутым полем можно сопоставить колчан – структуру, отражающую многие теоретико-представленческие свойства алгебры. Определение этого колчана можно дать при помощи следующего утверждения: для каждой конечномерной алгебры A над алгебраически замкнутым полем k существует единственная алгебра путей колчана с соотношениями ${}^{\mathrm{k}Q}/_{I}$, категория модулей которой эквивалента категории модулей A, причём колчан Q определяется однозначно. Этот колчан — важнейший инвариант алгебры. Например, алгебра полупроста тогда и только тогда, когда в колчане нет стрелок. Или более общо: гомологическая размерность алгебры не может быть больше, чем длина максимального пути в этом колчане. Таким образом, представляется естественным изучение колчанов различных типов алгебр.

Одним из наиболее интересных классов конечномерных алгебр является класс групповых алгебр конечных групп. Если характеристика поля не делит порядок группы, то групповая алгебра полупроста и соответствующий колчан не имеет стрелок. Но если характеристика делит порядок группы, то колчан всегда получается нетривиальным и он сильно зависит от группы.

Наша работа посвящена изучению колчанов групповых алгебр над алгебраически замкнутыми полями конечной характеристики для некоторых классов групп. А именно абелевых p-групп, где p является характеристикой поля, и основным результатом стала теорема об описании колчанов этого класса групп.

2 Основные определения

Через k на протяжении всей работы мы будем обозначать некоторое поле. Все рассматриваемые алгебры будут считаться k-алгебрами.

Колчаном Q будем называть ориентированный граф с конечным множеством вершин Q_0 и конечным множеством стрелок Q_1, а через $W(Q)$ обозначим множество его путей. Для каждой вершины $i \in Q_0$ рассмотрим некоторый элемент e_i. Его можно воспринимать, как путь длины ноль с началом и концом в вершине i.

Обозначим через $W'(Q) = W(Q) \cup \{e_i \mid i \in Q_1\}$. Тогда алгеброй путей колчана kQ называется свободное векторное пространство, порожденное $W'(Q)$. Элементами kQ будут являться конечные линейные комбинации вида $\sum_{w \in W'(Q)} a_w w$, где $a_w \in \mathrm{k}$. Произведение в алгебре достаточно задать на базисе. Пусть $w_1, w_2 \in W(Q)$, где $w_1 = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ и $w_2 = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m$. Тогда их произведение определяется следующим образом:

$$w_1 \cdot w_2 = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\beta_1\beta_2\dots\beta_m, & \text{если конец стрелки } \alpha_n \text{ совпадает с началом } \beta_1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $w \in W(Q)$, где $w = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$. Тогда

$$w \cdot e_i = \begin{cases} w, & \text{если конец стрелки } \alpha_n \text{ это вершина } i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$e_i \cdot w = \begin{cases} w, & \text{если начало стрелки } \alpha_1 \text{ это вершина } i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} e_i, & i = j, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Алгебра путей колчана kQ является алгеброй с единицей

$$1 = \sum_{i \in Q_0} e_i.$$

Идеал алгебры kQ, порожденный всеми стрелками из Q_1, обозначим через J. Тогда алгеброй путей колчана с соотношениями будем называть любую фактор-алгебру вида ${}^{\mathrm{k}Q}/_{I}$, где Q — конечный колчан, и I — допустимый идеал алгебры kQ, то есть такой идеал, для которого существует число $t \in \mathbb{N}$ такое, что $J^t \subseteq I \subseteq J^2$.

Групповой алгеброй конечной группы G над полем k будем называть векторное пространство с базисом G и умножением, наследуемым из группы:

$$g_i \cdot g_j = g_i g_j.$$

Характеристикой поля k называется такое наименьшее число $p \in \mathbb{N}$, что

$$p \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p} = 0.$$

Такое число обозначают $p = char(\mathrm{k})$ и оно всегда простое.

3 Вспомогательные изоморфизмы

Теорема 3.1. *Если G, H — конечные группы, то* $\mathrm{k}[G \times H] \cong \mathrm{k}[G] \bigotimes \mathrm{k}[H]$.

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $f : \mathrm{k}[G] \bigotimes \mathrm{k}[H] \to \mathrm{k}[G \times H]$, заданное на базисе:

$$f(g \otimes h) = (g, h),$$

где $g \in G, h \in H$. f является изоморфизмом векторных пространств, так как переводит базис в базис. Осталось проверить, что оно является гомоморфизмом алгебр, то есть уважает произведение, и, по линейности, достаточно проверить на базисе:

$$f((g_1 \otimes h_1)(g_2 \otimes h_2)) = f(g_1 g_2 \otimes h_1 h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2) = (g_1, h_1)(g_2, h_2) = f(g_1 \otimes h_1) f(g_2 \otimes h_2).$$

□

4 Алгебры путей колчана

4.1 Алгебры путей колчана без соотношений

В этой части нашей работы мы будем рассматривать алгебры путей колчана $\mathrm{k}Q^1, \mathrm{k}Q^2$ и хотим построить колчан, соотвествующий их тензорному произведению.

Для данных Q^1, Q^2 построим следующий колчан $Q^1 \bigotimes Q^2$:

$$(Q^1 \bigotimes Q^2)_0 = \left\{(i,j) | i \in Q^1_0, j \in Q^2_0\right\},$$

$$E((i,j_1),(i,j_2)) = (e_i, \beta), \text{ где } e_i \text{ — путь длины ноль в } \mathrm{k}Q^1,\ \beta : j_1 \to j_2 \in Q^2_1;$$
$$E((i_1,j),(i_2,j)) = (\alpha, \tilde{e_j}), \text{ где } \tilde{e_j} \text{ — путь длины ноль в } \mathrm{k}Q^2,\ \alpha : i_1 \to i_2 \in Q^1_1;$$
$$E((i_1,j_1),(i_2,j_2)) = \varnothing,$$

где $E(u,v)$ — множество стрелок между вершинам u и v.

Пути длины ноль, соответствующие вершине (i,j) будем обозначать $e_{i,j}$.

Пути в алгебре $\mathrm{k}(Q^1 \bigotimes Q^2)$ представляются в виде $a = a_1 a_2 \dots a_n$, где $a_i = (\alpha_i, \beta_i)$ — пара элементов из $\mathrm{k}Q^1$ и $\mathrm{k}Q^2$ соответственно, один из которых является стрелкой, а второй — путем нулевой длины.

Теперь рассмотрим функцию $f : \mathrm{k}(Q^1 \bigotimes Q^2) \to \mathrm{k}Q^1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2$ и зададим ее на стрелках и путях длины 0:

$$f(e_{i,j}) = e_i \otimes \tilde{e_j}, \quad f(\alpha, \tilde{e_j}) = \alpha \otimes \tilde{e_j}, \quad f(e_i, \beta) = e_i \otimes \beta$$

естетсственно продолжим ее на весь базис и дальше, по линейности, на все простраство, для этого зададим на произвольном пути a:

$$f(a) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_n).$$

Лемма 4.1. *Построенное линейное отображение f является сюръективным гомоморфизмом алгебр.*

Доказательство. Достаточно проверить свойства на базисе: если $a_m b_1 \neq 0$, то

$$f(ab) = f(a_1 a_2 \dots a_m b_1 \dots b_n) = f(a_1) \dots f(a_m) f(b_1) \dots f(b_n) = f(a_1 \dots a_m) f(b_1 \dots b_n) = f(a) f(b).$$

Если же $a_m b_1 = 0$, где $a_m = (\alpha_1, \beta_1), b_1 = (\alpha_2, \beta_2)$, то стрелки не компануются, а значит либо $\alpha_1 \alpha_2 = 0$, либо $\beta_1 \beta_2 = 0$, тогда

$$f(a_m) f(b_1) = (\alpha_1 \otimes \beta_1)(\alpha_2 \otimes \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 \otimes \beta_1 \beta_2 = 0,$$

$$f(a) f(b) = f(a_1) \dots f(a_m) f(b_1) \dots f(b_m) = 0 = f(0) = f(ab).$$

Проверим, что единица переходит в единицу:

$$f(1) = f\left(\sum_{i,j} e_{i,j}\right) = \sum_{i,j} e_i \otimes \tilde{e_j} = \left(\sum_i e_i\right) \otimes \left(\sum_j \tilde{e_j}\right) = 1 \otimes 1.$$

Теперь проверим сюръективность, для этого проверим, что каждый базисный элемент $h \otimes g$ лежит в образе. Пусть $h = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$, $g = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$, где α_i, β_j — стрелки, k — конец стрелки α_m, l — начало стрелки β_1. Тогда

$$f((\alpha_1, \tilde{e_l}) \dots (\alpha_m, \tilde{e_l})(e_k, \beta_1) \dots (e_k, \beta_n)) = (\alpha_1 \dots \alpha_m) \otimes (\beta_1 \dots \beta_n) = h \otimes g.$$

$\square$

Используя первую теорему о гомоморфизме, получаем $\mathrm{k}Q^1 \otimes \mathrm{k}Q^2 \cong \mathrm{k}(Q^1 \otimes Q^2)/_{\mathrm{Ker}\, f}$. Рассмотрим подробнее, как выглядит ядро отображения f.

Лемма 4.2. *Обозначим за U базис путей в $\mathrm{k}(Q^1 \otimes Q^2)$, тогда $\mathrm{Ker}\, f = \sum V_{h,g}$ по всем путям $h \in \mathrm{k}Q^1$, $g \in \mathrm{k}Q^2$, где $V_{h,g} = \{ \sum\limits_{i=1}^{n} r_i u_i | \sum\limits_{i=1}^{n} r_i = 0, u_i \in U, f(u_i) = h \otimes g \}$.*

Доказательство. Доказывать это равенство будем двумя включениями:

1. $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \sum V_{h,g}$

   Фиксируем $x \in \mathrm{Ker}\, f$. Разложим элемент по базису: $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$. Тогда

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(u_i) = 0.$$

   Каждый элемент $f(u_i)$ имеет вид $h \otimes g$, которые образуют базис образа, а тогда сгруппируем слагаемые по базису и заметим, что каждый коэффициент должен быть равен 0. Это и значит, что $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i$, где каждый $x_i \in V_{h,g}$ для некоторых h и g.

2. $\mathrm{Ker}\, f \supseteq \sum V_{h,g}$ Достаточно показать, что каждый $V_{h,g} \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. Фиксируем $x \in V_{h,g}$. Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i u_i$, где каждый $f(u_i) = h \otimes g$ для некоторых h, g, и $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = 0$.

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(u_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) h \otimes g = 0.$$

□

Такое описание ядра довольно громоздко, однако мы нашли более удобное множество его образующих.

Лемма 4.3. *Обозначим за I идеал, порожденный элементами $(\alpha, \tilde{e_k})(e_l, \beta) - (e_n, \beta)(\alpha, \tilde{e_m})$, где n, k — начала, а l, m — концы α и β соответственно. Тогда $\mathrm{Ker}\, f = I$.*

Доказательство. Очевидно, что $I \subseteq \mathrm{Ker}\, f$, так как он равен $\sum V_{h,g}$ для h и g — стрелок.

С другой стороны, в $\mathrm{k}(Q^1 \otimes Q^2)/_I$ класс пути $(\alpha_1, \beta_1) \dots (\alpha_i, \beta_i)(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}) \dots (\alpha_n, \beta_n)$ равен классу пути, в котором множитель $(\alpha_i, \beta_i)(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$ заменен на соответствующий $(\delta_i, \gamma_i)(\delta_{i+1}, \gamma_{i+1})$, разность с которым лежит в множестве образующих идеала I. Но любоые два пути u и v, такие что $f(u) = f(v)$, можно привести друг к другу за конечное число таких замен, а тогда образ каждого $V_{h,g}$ при факторизации равен 0, следовательно, $\sum V_{h,g} \subseteq I$, тогда и $\mathrm{Ker}\, f \subseteq I$. □

Таким образом

$$\mathrm{k}Q^1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 \cong {}^{\mathrm{k}(Q^1 \otimes Q^2)} /_I$$

4.2 Алгебры путей колчана с соотношениями

Теперь, воспользовавшись предыдущим результатом, мы хотим найти алгебру путей колчана с соотношениями для тензорного произведения двух алгебр путей колчана с соотношениями. Для этого рассмотрим эпиморфизм $\pi : \mathrm{k}Q^1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 \to {}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$, найдем его ядро и докажем, что получившийся идеал алгебры $\mathrm{k}(Q^1 \bigotimes Q^2)$ — допустимый.

Для начала определим эпиморфизм π. Рассмотрим канонические проекции $\pi_1 : \mathrm{k}Q^1 \to {}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1}$ и $\pi_2 : \mathrm{k}Q^2 \to {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$, и докажем вспомогательную лемму:

Лемма 4.4. *Если даны два гомоморфных линейных отображения $f : A \to C$ и $g : B \to D$, где A, B, C, D — алгебры, то для них существует единственный $\varphi : A \bigotimes B \to C \bigotimes D$ — гомоморфизм алгебр, такой что $\varphi(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tau : A \times B \to C \bigotimes D$, которое определим следующим образом
$$\tau(a, b) = f(a) \otimes g(b),$$
и докажем, что τ — билинейно. Для этого сначала проверим линейность по второму аргументу:
$$\tau(a, \alpha b_1 + \beta b_2) = f(a) \otimes g(\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha f(a) \otimes g(b_1) + \beta f(a) \otimes g(b_2) = \alpha\tau(a, b_1) + \beta\tau(a, b_2)$$
Линейность по первому аргументу проверяется аналогично, а значит τ — билинейно.

Тогда существует единственное линейное отображение $\varphi : A \bigotimes B \to C \bigotimes D$, такое что
$$\varphi(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b).$$

Для доказательства леммы остается проверить, что φ — гомоморфизм алгебр, для этого достаточно проверить свойства на базисе:
$$\varphi((a \otimes b) \cdot (c \otimes d)) = \varphi(ac \otimes bd) = f(ac) \otimes g(bd) = f(a)f(c) \otimes g(b)g(d) =$$
$$= (f(a) \otimes g(b)) \cdot (f(c) \otimes g(d)) = \varphi(a \otimes b) \cdot \varphi(c \otimes d)$$
$$\varphi(1 \otimes 1) = f(1) \otimes g(1) = 1 \otimes 1$$
□

Теперь, воспользовавшись этой леммой легко доказывается следующее утверждение

Утверждение 4.5. *Для π_1 и π_2 по предыдущей лемме существует гомоморфизм π, тогда* $\operatorname{Im}\pi = {}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$

Доказательство. Фиксируем $b \in {}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$. Тогда $b = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \otimes d_i$, где $c_i \in \mathrm{k}Q^1$, $b \in \mathrm{k}Q^2$. Но π_1 и π_2 — сюръекции, а значит существуют $a_i \in \mathrm{k}Q^1$, $b_i \in \mathrm{k}Q^2$, такие что $\pi_1(a_i) = c_i$ и $\pi_2(b_i) = d_i$. Следовательно, $\pi(a_i \otimes b_i) = c_i \otimes d_i$. Тогда $b = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \otimes d_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \pi(a_i \otimes b_i) = \pi(\sum_i a_i \otimes b_i) \in \operatorname{Im}\pi$, а значит ${}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2} \subseteq \operatorname{Im}\pi$. Включение $\operatorname{Im}\pi \subseteq {}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$ вытекает из определения $\operatorname{Im}\pi$, а тогда $\operatorname{Im}\pi = {}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$. □

Лемма 4.6. *Если B — дополнение базиса A в I_1 до базиса в $\mathrm{k}Q^1$, D — дополнение базиса C в I_2 до базиса в $\mathrm{k}Q^2$, то тогда $\{\pi_1(b) \otimes \pi_2(d) | b \in B, d \in D\} = B \bigotimes D$ будет базисом в ${}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$.*

Доказательство. Для начала докажем, что $\pi_1(B)$ — базис в ${}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1}$:

1. $\pi_1(B)$ — порождающее множество.

   Фиксируем $v \in {}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1}$. Так как π_1 — сюръекция, то существует $w \in \mathrm{k}Q^1$, такой что $\pi_1(w) = v$.
$$\pi_1(w) = \pi_1(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i + w') = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_1(b_i),$$
   где $w' \in I_1$, $b_i \in B$. А тогда $\pi_1(B)$ — порождающее.

2. $\pi_1(B)$ — линейно независимы.

   Пусть линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_1(b_i) = 0$. Тогда $\pi_1(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i) = 0$, а тогда $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \in \operatorname{Ker} \pi_1 = I_1$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_j$, где $a_j \in A$, а значит $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_j = 0$, но $B \bigcup A$ образуют базис в $\mathrm{k}Q^1$, а тогда они линейно независимы. Значит, $\alpha_i = \beta_j = 0$ для всех i, j, из чего следует, что $\{\pi_1(b_i)\}$ — линейно независимы.

Аналогично доказывается, что $\pi_2(D)$ — базис в ${}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$. А тогда базисом в ${}^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {}^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}$ будет $\{\pi_1(b) \otimes \pi_2(d) | b \in B, d \in D\}$. □

Следовательно $\mathrm{k}Q^1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 = I_1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 + \mathrm{k}Q^1 \bigotimes I_2 + \langle B \bigotimes D \rangle$. Из чего непосредственно следует

Утверждение 4.7. $\operatorname{Ker} \pi = I_1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 + \mathrm{k}Q^1 \bigotimes I_2$

Доказательство. Доказывать это равенство будем двумя включениями :

1. $\operatorname{Ker} \pi \supseteq I_1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 + \mathrm{k}Q^1 \bigotimes I_2$

   Это включение очевидно, так как I_1 и I_2 — ядра отображений π_1 и π_2 соответственно.

2. $\operatorname{Ker} \pi \subseteq I_1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 + \mathrm{k}Q^1 \bigotimes I_2$

   Фиксируем $b \in \operatorname{Ker} \pi$. Тогда $b \in \mathrm{k}Q^1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2$, а значит существуют $a \in I_1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2$, $c \in \mathrm{k}Q^1 \bigotimes I_2$, $b_i \in B$, $d_i \in D$, такие что
$$b = a + c + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \otimes d_i.$$

   Подействуем на b отображением π:
$$0 = \pi(b) = \pi(a) + \pi(c) + \pi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \otimes d_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi(b_i \otimes d_i).$$

   Значит все коэффициенты $\alpha_i = 0$, а тогда $b = a + c \in I_1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 + \mathrm{k}Q^1 \bigotimes I_2$.

□

Теперь докажем следующее утверждение

Утверждение 4.8. *Если $I_1 = \langle X \rangle$, то $I_1 \bigotimes \mathrm{k}Q^2 = \langle X \bigotimes 1 \rangle$, где $X \bigotimes 1 = \left\{ x \otimes 1 | x \in X \right\}$.*

Доказательство. Доказывать это равенство будем также двумя включениями.

1. $I_1 \otimes \mathrm{k}Q^2 \subseteq \langle X \otimes 1 \rangle$

   Фиксируем $v \in I_1 \otimes \mathrm{k}Q^2$. Тогда
   $$v = \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes c_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} x_{i,j}) \otimes c_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} (x_i \otimes 1)(1 \otimes \alpha_{i,j} c_j)) \in \langle X \bigotimes 1 \rangle .$$
   А значит $I_1 \otimes \mathrm{k}Q^2 \subseteq \langle X \otimes 1 \rangle$.

2. $I_1 \otimes \mathrm{k}Q^2 \supseteq \langle X \otimes 1 \rangle$

   Очевидно, что $X \otimes 1 \subseteq I_1 \otimes \mathrm{k}Q^2$, а так как $\langle X \otimes 1 \rangle$ — минимальное, содержащие $X \otimes 1$, то $\langle X \otimes 1 \rangle \subseteq I_1 \otimes \mathrm{k}Q^2$.

□

Аналогично доказывается, что $\mathrm{k}Q^1 \otimes I_2 = \langle 1 \otimes Y \rangle$, если $I_2 = \langle Y \rangle$. Тогда результат полученный в предыдущем утверждении можно перезаписать в новых обозначениях
$$\operatorname{Ker} \pi = I_1 \otimes \mathrm{k}Q^2 + \mathrm{k}Q^1 \otimes I_2 = \langle X \otimes 1 \rangle + \langle 1 \otimes Y \rangle .$$
Следовательно, по первой теореме о гомоморфизме получаем
$$^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}} \cong {^{\mathrm{k}Q^1 \otimes \mathrm{k}Q^2}/_{\langle X \otimes 1 \rangle + \langle 1 \otimes Y \rangle}}.$$
А принимая во внимание то, что $^{\mathrm{k}(Q^1 \otimes Q^2)}/_I \cong \mathrm{k}Q^1 \otimes \mathrm{k}Q^2$, получаем
$$^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}} \cong {^{\mathrm{k}(Q^1 \otimes Q^2)/I}/_{\langle X \otimes 1 \rangle + \langle 1 \otimes Y \rangle}}.$$

Теперь докажем следующую лемму, которая прояснит нам структуру этой фактор-алгебры

Лемма 4.9. *Если J_0, I — идеалы алгебры A, J — идеал алгебры $A/_I$, причем $\pi_1(J_0) = J$ для канонической проекции $\pi_1 : A \to {^A/_I}$, то $^{A/I}/_J \cong^A /_{I+J_0}$.*

Доказательство. Доказывать это равенство будем двумя включениями. Обозначим каноническую проекцию $A/_I$ на $A/_I/_J$ через π_2, $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$.

1. $\operatorname{Ker} \pi \subseteq I + J_0$

   Фиксируем $x \in \operatorname{Ker} \pi$. Тогда его образ равен 0, а значит $\pi_2(\pi_1(x)) = 0$. Тогда $\pi_1(x) \in J$. Следовательно, существует $y \in J_0$, такой что $\pi_1(y) = \pi_1(x)$. Тогда $x - y \in \operatorname{Ker} \pi_1 = I$, а значит $x = (x - y) + y \in I + J_0$.

2. $\operatorname{Ker} \pi \supseteq I + J_0$

   Заметим, что
   $$\pi_1(I + J_0) = \pi_1(I) + \pi_1(J_0) \subseteq J = \operatorname{Ker} \pi_2,$$
   а тогда $I + J_0 \subseteq \operatorname{Ker} \pi$.

□

Введем обозначение - если $x \in \mathrm{k}Q^1$, то
$$(x, 1) = \sum_i (x, e_i), \text{где } (x, e_i) = (\sum_j r_j x_j, e_i) = \sum_j r_j (x_j, e_i),$$
$$\text{а } (x_j, e_i) = (\alpha_1, e_i) \dots (\alpha_m, e_i), x_j = \alpha_1 \dots \alpha_m.$$
Аналогично определяется $(1, y)$.
Тогда для $\langle X \otimes 1, 1 \otimes Y \rangle$ таким J_0 будет $\langle (X, 1), (1, Y) \rangle$, где $(X, 1) = \{(x, 1) | x \in X\}$, $(1, Y) = \{(1, y) | y \in Y\}$, а значит
$$^{\mathrm{k}Q^1}/_{I_1} \bigotimes {^{\mathrm{k}Q^2}/_{I_2}} \cong {^{\mathrm{k}(Q^1 \otimes Q^2)}/_{I + \langle (X,1),(1,Y) \rangle}}$$
.

Остается доказать, что $I + \langle (X, 1), (1, Y) \rangle$ – допустимый идеал.

Лемма 4.10. *Если идеалы I_1 и I_2 алгебр путей колчанов ${}^{kQ^1}/_{I_1}$ и ${}^{kQ^2}/_{I_2}$, такие что $J^{t_1} \subseteq I_1$, $J^{t_2} \subseteq I_2$, то тогда $J^{t_1+t_2} \subseteq I + \langle (X,1),(1,Y)\rangle \subseteq J^2$.*

Доказательство. Для этого покажем, что пути длины t_1+t_2 лежат в идеале $I + \langle (X,1),(1,Y)\rangle$. Фиксируем $v \in J^{t_1+t_2}$. Тогда он может быть представлен в виде $v = (v-(g,h)) + (g,h)$, где $f((g,h)) = f(v)$. Но тогда легко заметить, что $(v-(g,h)) \in I$ (так как их образы совпадают и сумма коэффициентов равна 0), а $(g,h) \in \langle (X,1),(1,Y)\rangle$ (так как $(g,h) = (g,1)(1,h)$, а тогда $g \in \langle X\rangle \vee h \in \langle Y\rangle$, из чего следует, что $(g,h) \in \langle (X,1),(1,Y)\rangle$). Значит, $v \in I + \langle (X,1),(1,Y)\rangle$, а тогда $J^{t_1+t_2} \subseteq I + \langle (X,1),(1,Y)\rangle$.
Тогда остается проверить, что $I + \langle (X,1),(1,Y)\rangle \subseteq J^2$. Для этого фиксируем $w \in I + \langle (X,1),(1,Y)\rangle$. Тогда $w = r + a + b$,где $r \in I, a \in \langle (X,1)\rangle, b \in \langle (1,Y)\rangle$. Тогда легко заметить, что $r \in J^2$, так как I порожден элементами длины два, а значит r имеет длину не меньше двух. Элемент $a = \sum_i r_i(x_i,1)$, где $x_j \in J_1^2$, а тогда $a \in J^2$. Аналогично $b \in J^2$. Значит и $w \in J^2$.
Следовательно, $I + \langle (X,1),(1,Y)\rangle \subseteq J^2$.
А тогда идеал $I + \langle (X,1),(1,Y)\rangle$ – допустимый. □

5 Колчаны алгебр Абелевых p-групп.

В этой части нашей работы мы воспользуеся результатами, полученными выше, для того, чтобы понять, как будут выглядеть алгебры путей колчана у некоторых групп, а именно Абелевых p-групп.

Рассмотрим групповую алгебру $\mathrm{k}[C_{p^m}]$. В ней $g^{p^m} = 1$, а тогда $g^{p^m} - 1 = 0$. Теперь докажем вспомогалельную лемму

Лемма 5.1. *Если* $p = char(\mathrm{k})$, A *— алгебра над* k, *то тогда* $(x+y)^{p^m} = x^{p^m} + y^{p^m}, x, y \in A, m \in \mathbb{N}$

Доказательство. Разложим $(x+y)^{p^m}$ по биному Ньютона:

$$(x+y)^{p^m} = x^{p^m} + C^1_{p^m} x^{p^m-1} y + \ldots + C^k_{p^m} x^{p^m-k} y^k + \ldots + C^{p^m-1}_{p^m} x y^{p^m-1} + y^{p^m},$$

где $C^k_{p^m} = \frac{p^m!}{k!(p^m-k)!} = \frac{p^m(p^m-1)(p^m-2)\cdots(p^m-k+1)}{k!}$. Тогда, если какой-то множитель $(k-i) \vdots p^t$, то и $(p^m - k + i) \vdots p^t$, а значит $C^k_{p^m} = 0$, так как оно делится на p. Если же $k \vdots p^t$, то тогда $t < m$ (так как $k < p^m$), а значит и в этом случае $C^k_{p^m} = 0$. Следовательно, $(x+y)^{p^m} = x^{p^m} + y^{p^m}$. □

Тогда по этой лемме получаем, что $(g-1)^{p^m} = g^{p^m} - 1 = 0$.

Теорема 5.2. $\mathrm{k}[y] / \langle y^{p^m} \rangle \cong \mathrm{k}[C_{p^m}]$.

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $f : \mathrm{k}[y] \longrightarrow \mathrm{k}[C_{p^m}]$, определенное на базисе следующим образом: $f(y) = g - 1; f(1) = 1; f(y^k) = (g-1)^k$. Теперь докажем, что оно является гомоморфизмом, проверяя свойство для произведения на базисе.

$$f(y^k \cdot y^l) = f(y^{k+l}) = (g-1)^{k+l} = (g-1)^k \cdot (g-1)^l = f(y^k) \cdot f(y^l),$$

при $k + l < p^m$.

$$f(y^k \cdot y^l) = f(0) = 0 = (g-1)^{k+l} = f(y^k) \cdot f(y^l),$$

когда $k + l \geq p^m$. Тогда по первой теореме о гомоморфизме

$$\mathrm{k}[y] / \mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f.$$

Остается понять, чему равны $\mathrm{Im}\, f$ и $\mathrm{Ker}\, f$.

Утверждение 5.3. $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{k}[C_{p^m}]$

Доказательство. Предварительно докажем, что $\{(g-1)^i\}_{i=0}^{p^m-1}$ — базис $\mathrm{k}[C_{p^m}]$. Для этого покажем, что это множество линейно независимо.

Пусть $a_0 + a_1(g-1) + \ldots + a_{p^m-1}(g-1)^{p^m-1} = 0$. Тогда, легко заметить, что коэффициент при g^{p^m-1} в точности a_{p^m-1}, а тогда $a_{p^m-1} = 0$. Значит, $a_{p^m-1}(g-1)^{p^m-1} = 0$. Аналогично, $a_{p^m-2} = a_{p^m-3} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, и так как общее количество этих линейно независимых элементов совпадает с размерностью пространства, то $\{(g-1)^i\}_{i=0}^{p^m-1}$ — базис. Так как этот базис лежит в образе, то образ совпадает со всем пространством □

Теперь рассмотрим ядро этого гомоморфизма и постараемся понять, из каких элементов оно будет состоять.

Фиксируем элемент $c \in \mathrm{Ker} f$ и рассмотрим его образ $f(c)$. Элемент c раскладывается по базису: $c = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots + c_m y^m$, а тогда

$$f(c) = f(c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots + c_m y^m) = \sum_{i=0}^{m} c_i (g-1)^i,$$

но $(g-1)^{p^m} = g^{p^m}-1 = 1-1 = 0$, а тогда все элементы вида $(g-1)^i, i \geq p^m$ равны 0, следовательно $f(c) = \sum_{i=0}^{p^m-1} c_i(g-1)^i = 0$. Значит все коэффициенты в этой сумме равны 0. А тогда любой элемент в ядре представим в виде $c_{p^m}y^{p^m}+c_{p^m+1}y^{p^m+1}+\ldots+c_m y^m = y^{p^m}(c_{p^m}+c_{p^m+1}y+\ldots+c_m y^{m-p^m})$, а тогда $\mathrm{Ker} f \subseteq \langle y^{p^m}\rangle$. Включение $\langle y^{p^m}\rangle \subseteq \mathrm{Ker} f$, очевидно, так как $f(y^{p^m}) = 0$, тогда $\mathrm{Ker} f = \langle y^{p^m}\rangle$.

Таким образом получаем

$$\mathrm{k}[y]/_{\langle y^{p^m}\rangle} \cong \mathrm{k}[C_{p^m}].$$

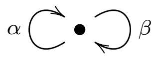
$\square$

Для наглядности приведем несколько примеров колчанов для абелевых p-групп:

1. Колчан групповой алгебры $\mathrm{k}[C_p]$ будет выглядеть следующим образом:

$$\alpha^p = 0$$

2. Колчан для $k[C_p \times C_p]$ будет выглядеть так:



$$\alpha^p = \beta^p = 0, \alpha\beta = \beta\alpha$$

Таким образом нами был построен инструмент для относительно простого способа постоения колчанов, который позволяет строить колчаны произвольных абелевых p-групп.

Авторы работы выражают благодарность Сергею Олеговичу Иванову и Анатолию Александровичу Зайковскому за полезные обсуждения и внимание к настоящей работе.

Список литературы:

[1] Дрозд Ю.А., Кириченко В.В., *Конечномерные алгебры*, Киев, «Вища школа», 1980.

[2] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И., *Основы теории групп*, Москва, «Наука», 1982.

[3] Халмош П., *Конечномерные векторные пространства*, Москва, Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.

[4] M. Auslander, I. Reiten, S.O.Smalo, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge University Press.