О производных функторах и пучках

Глеб Новиков

(Санкт-Петербург, Россия)

Аннотация

В этой работе изучается структура пучков в топологии Гротендика на абелевой категории. Было доказано, что пучки абелевых групп в топологии Гротендика являются точные слева контрвариантные функторы. Также было доказано, что значения производного функтора $\Gamma(X, F)$ совпадают со значениями производного функтора $R^i F$. Последнее интересно тем, что с его помощью можно определить производный функтор на категории, в которой нет или мало проективных объектов.

1 Введение

Теория категорий – язык современной математики. Она изучает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. Теория категорий нашла широкое применение в информатике и логике. Большой интерес в теории категорий представляют свойства отображений между категориями (так называемыми функторами) и структур, связанных с этими отображениями.

Подобно топологиям, которые определяются на обычных множествах или других структурах, можно определить топологию на категории (такая топология называется *топологией Гротендика*). Категория с определённой на ней топологией Гротендика называется *ситусом*. На топологических пространствах изучаются специальные конструкции – *пучки со значениями в какой-то категории* $\mathscr{C}$. На ситусах также можно можно определять пучки со значениями в категории $\mathscr{C}$, если последняя обладает достаточным количеством инъективных объектов (чтобы можно было считать производный функтор функтора глобальных сечений пучка). Таким образом можно исследовать пучки на категориях, наделённых особой топологией.

2 Основные определения

Прежде всего дадим определение предпучка и пучка на топологическом пространстве.

Пусть (X, Ω) – топологическое пространство, а $\mathscr{C}$ – некоторая категория с прямыми произведениями.

Определение 2.1. *Предпучком F на топологическом пространстве X называется отображение $F : \Omega \to \mathscr{C}$, то есть каждому открытому подмножеству U в X сопоставлен $F(U)$ – объект категории $\mathscr{C}$.*

Кроме того, каждому включению $V \subset U$ открытых множеств сопоставлен морфизм объектов категории $\mathscr{C}$:

$$\rho_{VU} : F(U) \to F(V).$$

Совокупность этих морфизмов должна удовлетворять следующим условиям:

- Для каждого $U \in \Omega$ ρ_{UU} является тождественным;
- Для каждой цепочки включений $W \subset V \subset U$ справедливо $\rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$.

Объект $F(U)$ категории $\mathscr{C}$ называется пространством сечения предпучка F над множеством U, а каждый элемент $F(U)$ называется сечением предпучка F над U.

Теперь перейдём к определению пучка. Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ – набор открытых множеств пространства X, и $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Пусть над каждым из них задано сечение $s_i \in F(U_i)$ предпучка F. Набор этих сечений называется *согласованным*, если для всяких i и j выполнено

$$\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j).$$

Определение 2.2. *Пучком называется предпучок, для которого выполнено две аксиомы:*

- $F(\varnothing)$ *– терминальный объект категории* $\mathscr{C}$.
- *(Аксиома склейки) всякий набор согласованных сечений* s_i *определяет единственное сечение* $s \in F(U)$, *такое что* $s_i = \rho_{U_i, U}(s)$ *для каждого* i.

Сечение s называется склейкой сечений s_i.

Предпучки и пучки выше были определены на каком-то топологическом пространстве. Теперь определим конструкцию, которую можно задать не просто на каком-то множестве (как обычную топологию), а на любой категории. Иными словами, построим так называемую *топологию Гротендика* на категории $\mathscr{A}$.

Определение 2.3. *Для каждого объекта* U *категории* $\mathscr{A}$ *определяются множества семейств морфизмов, «приходящих» в* U. *Для каждого* U *такие множества называются покрытиями* U. *Также требуется, чтобы*

- *изоморфизмы были покрытиями,*
- *композиции покрытий были покрытиями: если* $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$ *и* $\{U_{ij} \xrightarrow{\psi_{ij}} U_i\}_{j \in J}$ *есть покрытия, то и* $\{U_{ij} \xrightarrow{\varphi_i \psi_{ij}} U\}_{i \in I, j \in J}$ *является покрытием,*
- *замены базы покрытий были покрытиями: если* $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ *– покрытие и* $V \to U$ *морфизм, то существуют расслоенные произведения* $U_i \times_U V$ *и* $\{U_i \times_U \to V\}_{i \in I}$ *– покрытие.*

Очевидно, что когда на какой-то категории $\mathscr{A}$ задана топология Гротендика, иными словами, рассматривается ситус, то предпучки и пучки в этой топологии со значениями в категории $\mathscr{B}$ являются ковариантными функторами категорий $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.

3 Постановка задачи

На абелевой категории можно определить производный функтор от точного слева (контрвариантного) функтора со значениями в абелевых группах. Также можно определить топологию Гротендика на этой категории, в которой покрытия – эпиморфизмы. Также для пучков на топологии Гротендика можно определить производный функтор функтора глобальных сечений на объекте X $\Gamma(X, F)$. Задачей этой работы будет исследование пучков абелевых групп в топологии Гротендика, а также изучение определённого выше производного функтора.

4 Основные результаты

Теорема 4.1. *Пучками абелевых групп в топологии Гротендика являются точные слева контрвариантные функторы.*

Так как пучки можно определить даже когда проективных или приспособленных с этой стороны объектов не достаточно или нет в категории, то следующая теорема даёт нам способ определить производный функтор от функтора даже когда класса приспособленных объектов нет (но когда есть инъективные объекты и все прямые произведения в категории-образе).

Теорема 4.2. *Значения производного функтора* $\Gamma(X, F)$ *совпадают со значениями производного функтора* $R^i F$.

5 Доказательства результатов

Теорема 4.1. Пучками абелевых групп в топологии Гротендика являются точные слева контрвариантные функторы.

Доказательство. Рассмотрим пучок F абелевых групп. Пусть $f : A \to B$ – эпиморфизм. По определению функтора F последовательность

$$0 \to F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \to F(A \times_B A)$$

точна. Кроме того, последовательность

$$0 \to F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \to F(\ker f)$$

является ретрактом последовательности выше, поэтому также является точной.

Обратно, так как последовательность

$$0 \to F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \to F(\ker f)$$

является ретрактом последовательности

$$0 \to F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \to F(A \times_B A),$$

и если последняя точна, то в аксиоме пучка не может появиться неточности.

Теорема 4.2. Значения производного функтора $\Gamma(X, F)$ совпадают со значениями производного функтора $R^i F$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ – абелева категория, на которой задана топология Гротендика. Тогда объекту X категории $\mathscr{A}$ можно сопоставить $Hom(-, X) \in Ob\mathscr{A}$. Морфизму объектов сопоставляются естественные преобразования фукторов. Таким образом мы определили функтор $F : \mathscr{A} \to Sh\mathscr{A}$, где $Sh\mathscr{A}$ – категория пучков на $\mathscr{A}$. Точность этого функтора доказана в $[EC]$.

Теперь построим функтор $RF : D(A) \to D(Ab^{op})$, как композицию $D(A) \to D(Sh(A)) \xrightarrow{Rhom(-,F)} D(Ab^{op})$. Так как он композиция функторов, являющихся производными, он и сам производный (то есть, универсальное свойство из Гельфанда-Манина выполнено).

6 Заключение

Полученные результаты интересны для современной теории категорий и гомологической алгебры тем, что они позволяют определить весьма требовательные (к свойствам изучаемых объектов) конструкции, подходя с другой стороны к поставленной задачи. Следующим шагом этой работы будет изучение конкретных примеров, построенных с использованием доказанных в работе теорем.

Автор выражает благодарность научному руководителю за проявленный интерес к работе и помощь в исследовании.

7 Используемая литература

[GelMan] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, «Гомологическая алгебра», Алгебра – 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 38, ВИНИТИ, М., 1989

[Weib] Charles A. Weibel, «An introduction to homological algebra», Cambridge studies in advanced mathematics 38, Cambridge University Press, 1994

[ExCat] Theo Buhler, «Exact Categories», arXiv:0811.1480v2 [math.HO] 22 Apr 2009

[Freyd] Peter Freyd, «Abelian categories: an introduction to the theory of functors», Harper & Row, 1964