SL_2 - факторизации скрученных групп типа Ли

Давладов Дмитрий, Михайлов Илья (Санкт-Петербург, Россия)

1 Введение.

В настоящей работе исследуются факторизации конечных групп типа Ли в терминах подгрупп, изоморфных SL_2. Такие разложения хорошо изучены для групп Шевалле нормальных типов, в то время как для скрученных групп существующие доказательства носят неявный характер и дают далекую от точной оценку длины факторизации. В настоящей работе даётся более точная оценка длины факторизации.

В дальнейшем будем использовать следующие определения и обозначения.

Определение 1.1. *Рассмотрим множество матриц размера $n \times n$ над коммутативным кольцом R (в дальнейшем будем обозначать его как $M(n,R)$), где n — натуральное число, с определителем, равным 1. Тогда относительно операции умножения это множество образует группу, которая обозначается через $SL_n(R)$ и называется специальной линейной группой.*

Определение 1.2. *Пусть R — коммутативное кольцо и w — инволюция на нем, т.е. такое отображение, что для любого элемента $x \in R$ выполняется $w(w(x)) = x$. Для элемента $a \in R$ его образобозначим через $\overline{a} = w(a)$. Для матрицы $m \in M(n,R)$ определим сопряженную к ней матрицу $\overline{m}$ посредством условия:*

$$\forall i,\ j = \overline{1,n} \quad \overline{x_{i,j}} = \overline{(x_{i,j})}.$$

Определение 1.3. *Пусть*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим множество

$$SU_3(R) = \{x \in SL_3(R) | x^t J \overline{x} = J\}.$$

Это множество относительно операции умножения матриц образует группу, которая называется специальная унитарная группа размерности 3.

В дальнейшем вместо $SU_3(R)$ и $SL_2(R)$ будем писать SU_3 и SL_2 соответсвенно, ввиду рассмотрения их над конечным полем F таким, что $|F| = q^2$, где q — степень простого числа.

Введем обозначения некоторых специальных элементов группы SU_3: $x_+(a,b)$, $x_-(a,b)$, u_+, u_- и $h(y)$. Для начала определим антиэрмитовы элементы.

Определение 1.4. ***Эрмитовы и антиэрмитовы элементы***
Пусть w — некоторая инволюция над конечным полем F, тогда эрмитовым элементом назовем элемент $a \in F$ такой, что $\overline{a} = a$. Антиэрмитвым элеменом назовем элемент $b \in F$ такой, что $\overline{b} = -b$.

Пусть
$$\Psi = \{(a,b) \in F \times F | a\overline{a} = b + \overline{b}\}.$$
Матрицы $x_+(a,b)$ и $x_-(a,b)$, где $(a,b) \in \Psi$ будем записывать следующим образом:
$$x_+(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & \overline{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_-(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{a} & 1 & 0 \\ b & a & 1 \end{pmatrix}.$$
Назовём их элементарными образующими. Легко проверяется, что
$$x_+(a,b),\ x_-(a,b) \in SU_3(R).$$

Пусть $\lambda \in F$ — антиэрмитов элемент, тогда введем следующие обозначения:
$$u_+ = x_+(0,\lambda); \quad u_- = x_-(0,\lambda).$$

Далее, пусть $y \in F$. Рассмотрим матрицу
$$h(y) = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1}\bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{y}^{-1} \end{pmatrix},$$
очевидно, что $h(y) \in SU_3$.

Определим подгруппы U^+ и U^- группы SU_3. Для этого обозначим через U^+ и U^- подгруппы группы SU_3, порожденные элементами $x_+(a,b)$ и $x_-(a,b)$ соответственно, где $(a,b) \in \Psi$ (см. определение 1.5). В действительности, подгруппа U^+ состоит из элементов типа x_+, поскольку произведение элементов типа x_+ будет элементом типа x_+. Аналогично определяется подгруппа U^-.

2 Постановка задачи.

Основной задачей работы является задача построения факторизации скрученных групп типа Ли подгруппами, изоморфными SL_2.

Очевидно, для начала необходимо построить факторизацию SU_3, поскольку скрученные группы типа Ли явно представляются в виде произведения подгрупп, изоморфных SL_2 и SU_3.

3 Основные результаты.

Основным результатом работы является следующая теорема, благодаря которой была значительно улучшена оценка длины факторизации группы SU_3.

Теорема 3.1.
Группа SU_3 допускает SL_2-факторизацию длины 20, а именно

$$SU_3 = H_1 H_2 \dots H_{19} H_{20}, \text{ где } \forall i = \overline{1,20} \quad H_i \cong SL_2,\ H_i \leqslant SU_3.$$

4 Используемые результаты. Вспомогательные результаты.

Для получения основных результатов работы были использованы следующие леммы. В статье ([1], стр. 26, лемма 2.2) доказано следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Группа SU_3 допускает унитреугольную факторизацию $SU_3 = U^+U^-U^+U^-$ длины 4.*

В статье ([2], стр. 203, теорема 2) доказано следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть $a \in F \setminus \{0\}$, тогда для какого-то $b \in F$ такого, что пара $(a,b) \in \Psi$ (см. определение 1.5)и для любого антиэрмитового элемента $\lambda \in F$ существуют g_1, g_2, g_3, $g_4 \in SU_3$ такие, что выполнено следующее равенство:*

$$x_+(a,b) = u_+^{g_1} u_+^{g_2} u_+^{g_3} u_+^{g_4}.$$

Аналогичное утверждение имеет место быть и для $x_-(a,b)$

В настоящей работе доказана следующая лемма.

Лемма 4.3.
Для любой пары элементов $(a,b) \in \Psi$ (см. определение 1.5), для любого антиэрмитового элемента $\lambda \in F$ существуют матрицы g_1, g_2, g_3, g_4, $g_5 \in SU_3$ такие, что выполняется следующее равенство:

$$x_+(a,b) = u_+^{g_1} u_+^{g_2} u_+^{g_3} u_+^{g_4} u_+^{g_5}.$$

Аналогичное утверждение имеет место быть и для $x_-(a,b)$.

5 Доказательство основных результатов.

Докажем Теорему 3.1.
Как следствие Леммы 4.3, имеет место включение:

$$U^{+} \subseteq H_1 \dots H_5,\ \text{где } \forall i = \overline{1,5}\ H_i \cong SL_2,\ H_i \leqslant SU_3$$

Аналогичное утверждение справедливо и для U^{-}. Используя результат Леммы 4.1, получаем:

$$SU_3 = U^{+}U^{-}U^{+}U^{-} = H_1 \dots H_5 H_6 \dots H_{10} H_{11} \dots H_{15} H_{16} \dots H_{20},$$
$$\text{где } \forall i = \overline{1,20}\ H_i \cong SL_2,\ \ H_i \leqslant SU_3.$$

6 Доказательство вспомогательных результатов.

Докажем Лемму 4.3.
Из Леммы 4.2 получаем, что для какого-то b' выполнено

$$x_{+}(a, b') = u^{g_1} u^{g_2} u^{g_3} u^{g_4}.$$

Понятно, что, рассматривая всевозможные сопряжения вида $u^{h(y)}$, $y \in F$, можно получить любую матрицу вида $x_{+}(0, c)$, где c - антиэрмитов элемент. Тогда выберем такой y, что $c = b - b'$. Из соотношения $a\bar{a} = b + \bar{b} = b' + \bar{b'}$ следует, что c - антиэрмитов. Остаётся заметить, что

$$x_{+}(a, b) = x_{+}(a, b') x_{+}(0, c) = x_{+}(a, b') u^{h(y)} = u^{g_1} u^{g_2} u^{g_3} u^{g_4} u^{h(y)}.$$

Авторы работы выражают благодарность ассистенту кафедры алгебры математико-механического факультета СПбГУ А.В. Смоленскому за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Смоленский Андрей Вадимович *"Факторизации и ширина групп Шевалле над маломерными кольцами"*

[2] Martin W. Liebeck, Nikolay Nikolov, Aner Shalev *"Groups of Lie type as products of SL_2 subgroups"*