Высшие тождества Якоби

Алексеев Илья Сергеевич (г. Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ №564, 11 класс)
Сергей Олегович Иванов, к.ф.-м.н., Лаборатория имени П.Л.Чебышева

Введение.

Алгебра Ли — объект абстрактной алгебры, который естественно возникает в теории групп Ли, в комбинаторной теории групп и других областях алгебры и геометрии. К примеру, алгебры Ли тесно связаны с группами Ли, которые играют значительную роль в современной геометрии. Хорошо известно, что с каждой группой Ли можно связать некоторую алгебру Ли, которая полностью отражает локальную структуру исходной группы.

Немалую роль в теории алгебр Ли играют выполняющиеся в алгебрах соотношения и тождества, которые на практике позволяют облегчить работу с другими математическими системами. В этой статье мы получили большой класс красивых соотношений, выполняющихся в произвольной алгебре Ли, и подробно описали их структуру.

1 Основные определения и использульемые результаты.

- Через k мы обозначаем некоторое фиксированное поле. В дальнейшем все векторные пространства и линейные отображения будут рассматриваться над полем k.

- Пусть U, V, W — векторные пространства. Отображение $b : U \times V \longrightarrow W$ называется **билиненым**, если для любых $u_0 \in U, v_0 \in V$ отображения $v \mapsto b(u_0, v)$ и $u \mapsto b(u, v_0)$ линейны.

- **Алгеброй** над полем k назывется пара $(A, *)$, где A – векторное пространство, и $* : A \times A \longrightarrow A$ — билинейное отображение. В этом случае используется обозначение $x * y := *(x, y)$. В дальнейшем мы будем обозначать алгебру тем же символом, что и векторое пространство A.

- Если A — алгебра с операцией $*$, то через A^{op} мы обозначим алгебру с тем же самым векторным пространством и операцией $\odot$, где $a \odot b = b * a$.

- Алгебра A называется **ассоциативной**, если для любых $x_1, x_2, x_3 \in A$ выполняется равенство $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$.

- Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — произвольный набор различных элементов. **Словом** (или **некоммутативным мономом**) мы называем произвольную последовательность этих элементов $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, где $k \in \mathbb{N}_0$. При $k = 0$ мы получаем пустое слово, которое будем обозначать 1. Множество всех таких слов обозначается через $FM(x_1, \ldots, x_n)$ и называется **свободным моноидом** от набора $x_1, \ldots, x_n$. На $FM(x_1, \ldots, x_n)$ может быть определена операция приписывания $(x_{i_1} \ldots x_{i_l}) * (x_{j_1} \ldots x_{j_s}) = x_{i_1} \ldots x_{i_l} x_{j_1} \ldots x_{j_s}$.

- **Свободной ассоциативной алгеброй** от набора $x_1, \ldots, x_n$ (или **алгеброй многочленов от некоммутирующих переменных** $x_1, \ldots, x_n$) называется алгебра $\mathsf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, состоящая из формальных линейных комбинаций элементов $FM(x_1, \ldots, x_n)$. Операция на $\mathsf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ на элементах $FM(x_1, \ldots, x_n)$ совпадает с операцией приписывания, а на остальных элементах определяется по билинейности.

- Алгебра L называется **алгеброй Ли**, если для любых $x, x_1, x_2, x_3 \in L$ выполняются равенства $x * x = 0$ и $(x_1 * x_2) * x_3 + (x_2 * x_3) * x_1 + (x_3 * x_1) * x_2 = 0$. Для алгебр Ли принято обозначение $[x, y] \coloneqq x * y$, и эта операция называется скобкой. Тогда тождества из определения алгебры Ли перепишутся следующим образом

  $$[x, x] = 0, \qquad [[x_1, x_2], x_3] + [[x_2, x_3], x_1] + [[x_3, x_2], x_1] = 0.$$

  Второе тождество называется **тождеством Якоби**.

- Из тождества $[x, x] = 0$ можно вывести тождество $[x_1, x_2] + [x_2, x_1] = 0$.

- Если A — ассоциативная алгебра, то через A_{Lie} обозначим алгебру Ли, векторное пространство которой совпадает с A, а скобка определяется следующим образом:

  $$[a, b] = ab - ba.$$

- **Алгеброй эндоморфизмов векторного пространства** V называется ассоциативная алгебра $\mathsf{End}(V)$ всех линейных отображений из V в V с операциями $+$ и $\circ$. Если φ и ψ — два таких линейных отображения, то, по определению, $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$, $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$.

- Пусть L — алгебра Ли и $x_1, \ldots, x_n \in L$. **Левонормированный коммутатор** элементов $x_1, \ldots, x_n$ определяется рекурсивно $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$, где $[x] = x$. Таким образом, тождество Якоби принимает вид

  $$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_2, x_1] = 0.$$

- (s, t)–шафл — это пара (α, β) такая, что $\alpha : \{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots, s+t\}$ и $\beta : \{1, \ldots, t\} \to \{1, \ldots, s+t\}$ — строго монотонные функции, чьи образы не пересекаются. Множество всех (s, t)–шафлов мы обозначим за $\mathsf{Sh}(s, t)$. Кроме того, через $\mathsf{Sh}^1(s, t)$ обозначим множество (s, t)-шафлов, для которых $\alpha(1) = 1$.

2 Постановка задачи.

Пусть L — алгебра Ли и $x_1, x_2, x_3 \in L$. Заметим, что на L выполняются следующие тождества

(2) $[x_1, x_2] + [x_2, x_1] = 0$

(3) $[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0.$

Но тождество

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_2, x_3, x_4, x_1] + [x_2, x_4, x_1, x_2] + [x_4, x_1, x_2, x_3] = 0$$

не выполняется в произвольной алгебре Ли. Возникает вопрос, существуют ли соотношения подобного типа, то есть комбинации левонормированных коммутаторов с единичным коэффициентом, для произвольного количества элементов.

Обозначим через S_n симметрическую группу порядка n. Пусть $T \subseteq S_n$ и $x_1, \dots, x_n \in A$, где A ассоциативная алгебра. Обозначим за

$$\mathsf{Sum}\,(T) = \sum_{\sigma \in T} x_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}.$$

Подмножество $T \subseteq S_n$ назовём **Якобиевым**, если тождество

$$\sum_{\sigma \in T} [x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = 0. \tag{2.1}$$

выполняется в любой алгебре Ли.

Так как подалгебра Ли в алгебре Ли $\mathsf{k}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, порожденная набором $x_1, \dots, x_n$, является свободной алгеброй Ли от $x_1, \dots, x_n$, (см. [1], теорема 0.5), тождество вида (2.1) выполняется в произвольной алгебре Ли тогда и только тогда, когда соответствующее соотношение выполняется в алгебре $\mathsf{k}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

Если $\mathsf{k} = \mathbb{Q}$, то из соотношениия (2.1) в $\mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ следует соотношение (2.1) в $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, откуда следует, что это соотношение выполняется и для любого k. Поэтому в определении Якобиева множества можно считать, что соотношение (2.1) выполняется в $\mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

Обозначим через $\gamma_n < \mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ векторное подпространство, порождённое мономами вида $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$ для всех $\sigma \in S_n$. Рассмотрим линейное отображение

$$\beta_n : \gamma_n \longrightarrow \gamma_n \quad \text{такое, что} \quad \beta_n(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) = [x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}].$$

Отсюда видно, что T Якобиево тогда и только тогда, когда $\beta_n(\mathsf{Sum}(T)) = 0$, причём соответствующие элементам $\mathsf{Sum}(T)$ тождества будут являться простыми и красивыми.

Тогда основные тождества алгебры Ли могут быть записаны в следующем виде

(2) $\beta_2(x_1 x_2 + x_2 x_1) = 0.$

(3) $\beta_3(x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2) = 0.$

В качестве основных задач будем рассматривать следующие задачи:

Задача 1. Найти как можно больше Якобиевых подмножеств.

Задача 2. Найти базис $\mathrm{Ker}(\beta_n)$, состоящий из элементов вида $\mathsf{Sum}(T)$ или доказать, что такого не существует.

3 Основные результаты.

Пусть $k, l \in \mathbb{N}$ такие, что $k + l \leq n$, и $(\alpha, \beta) \in \mathsf{Sh}^1(l - i, i)$, где $i = \overline{0, l-1}$. Рассмотрим следующие перестановки из S_n

$$\tilde{\tau}_{i,\alpha,\beta,k,l,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+i & k+i+1 & \cdots & k+l & k+l+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k & k+\beta(i) & \cdots & k+\beta(1) & k+\alpha(1) & \cdots & k+\alpha(l-i) & k+l+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

и определим

$$\tau_{i,\alpha,\beta,k,l,n} = \tilde{\tau}_{i,\alpha,\beta,k,l,n} \circ (1,2)^i.$$

Для $(\alpha, \beta) \in \mathsf{Sh}^1(k - i, i)$, где $i = \overline{0, k-1}$, рассмотрим следующие перестановки из S_n

$$\tilde{\sigma}_{i,\alpha,\beta,k,l,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ \beta(i) & \cdots & \beta(1) & \alpha(1) & \cdots & \alpha(l-i) & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Phi \in S_n$ следующую перестановку:

$$\Phi(i) = \begin{cases} k+i, & \text{если } i \leq k, \\ i-k, & \text{если } k < i \leq n. \end{cases}$$

Определим $\sigma_{i,\alpha,\beta,k,l,n} = \tilde{\sigma}_{i,\alpha,\beta,k,l,n} \circ \Phi \circ (1,2)^i$.

Наконец, для $k + l \leq n$ определим

$$T_{k,l,n} = \{\ \tau_{i,\alpha,\beta,k,l,n}\ \mid\ 0 \leq i \leq l-1,\ (\alpha,\beta) \in \mathsf{Sh}^1(l-i,i)\ \} \bigcup$$

$$\bigcup \{\ \sigma_{i,\alpha,\beta,k,l,n}\ \mid\ 0 \leq i \leq k-1,\ (\alpha,\beta) \in \mathsf{Sh}^1(k-i,i)\ \}$$

Обозначим за $JS_n \subseteq P(S_n) = 2^{S_n}$ множество всех Якобиевых подмножеств.

Теорема 1. *Если $k + l \leq n$, то подмножество $T_{k,l,n} \subseteq S_n$ является Якобиевым.*
Теорема 2. *Множество $\left\{ \mathsf{Sum}\left(\sigma \circ T_{k,1,n}\right) \mid \sigma(k+1) = 1, 1 \leq k \leq n-1 \right\}$ является базисом* $\mathrm{Ker}(\beta_n)$.

Теорема 1 даёт решение **задачи 1** и показывает, что $T_{k,l,n} \in JS_n$, а теорема 2 даёт ответ на **задачу 2**.

4 Вспомогательные результаты.

Следующая лемма кажется хорошо известной, но мы не смогли найти подходящей ссылки, поэтому приводим её с доказательством.

Лемма 4.1. *Пусть $x_1, \dots, x_n \in A$, где A ассоциативная алгебра. Тогда верно равенство*

$$[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{(\alpha,\beta)} (-1)^i x_{\beta(i)} \dots x_{\beta(1)} x_{\alpha(1)} \dots x_{\alpha(n-i)},$$

где вторая сумма пробегает по всем шафлам (α, β) из $\mathsf{Sh}^1(n-i, i)$.

Доказательство. Докажем это по индукции. Для $n = 2$ это очевидно. Будем считать, что формула верна для произвольного набора из n элементов и докажем её для произвольного набора из $n+1$ элемента. Рассмотрим элемент $[x_1, \dots, x_{n+1}]$, который является суммой следующих элементов:

$$(-1)^i x_{\beta(i)} \dots x_{\beta(1)} x_{\alpha(1)} \dots x_{\alpha(n-i)} x_{n+1} + (-1)^{i+1} x_{n+1} x_{\beta(i)} \dots x_{\beta(1)} x_{\alpha(1)} \dots x_{\alpha(n-i)},$$

где сумма берётся по $0 \le i < n$ и шафлам $(\alpha, \beta) \in \mathsf{Sh}(n-i, i)$. Любой $(n+1-i, i)$–шафл $(\alpha(1), \dots, \alpha(n+1-i), \beta(1), \dots, \beta(i))$ равен либо шафлу $(\alpha', \dots, \alpha'(n-i), n+1, \beta(1), \dots, \beta(i))$ для $(n-i, i)$–шафла (α', β), или шафлу $(\alpha(1), \dots, \alpha(n+1-i), \beta'(1), \dots, \beta'(i-1), n+1)$ для $(n+1-i, i-1)$–шафла (α, β'). Тогда требуемое утверждение выполняется по предположению индукции. □

Пусть L — алгебра Ли и $x \in L$. Рассмотрим линейное отображение $\mathsf{ad}(x) : L \to L$ заданное формулой $\mathsf{ad}(x)(y) = [y, x]$. Таким образом, мы получаем отображение

$$\mathsf{ad} : L \longrightarrow \mathsf{End}(L), \tag{4.1}$$

которое переводит x в $\mathsf{ad}(x)$.

Лемма 4.2. *Отображение 4.1 задаёт гомоморфизм алгебр Ли*

$$\mathsf{ad} : L \longrightarrow \mathsf{End}(L)^{\mathrm{op}}_{\mathsf{Lie}}.$$

Доказательство. Проверим свойство гомоморфизма:

$$[\mathsf{ad}(x), \mathsf{ad}(y)](z) = (\mathsf{ad}(x) \odot \mathsf{ad}(y) - \mathsf{ad}(y) \odot \mathsf{ad}(x))(z) =$$

$$= (\mathsf{ad}(y) \circ \mathsf{ad}(x) - \mathsf{ad}(x) \circ \mathsf{ad}(y))(z) = \mathsf{ad}(y)([z, x]) - \mathsf{ad}(x)([z, y]) = [[z, x], y] - [[z, y], x] =$$

(в силу тождества Якоби)

$$= [[y, x], z] = [z, [x, y]] = \mathsf{ad}([x, y])(z).$$

□

Предложение 4.3. *Для любого $a \in L$ и для любого набора $x_1, \dots, x_l \in L$, где $l \in \mathbb{N}$, выполняется равенство*

$$[a, [x_1, \dots, x_l]] = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{(\alpha,\beta)} (-1)^i \left[a, x_{\beta(i)}, \dots, x_{\beta(1)}, x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(l-i)}\right],$$

где вторая (внутренняя) сумма пробегает по всем шафлам $(\alpha, \beta) \in \mathsf{Sh}^1(l-i, i)$.

Доказательство. По лемме 4.2. имеем, что

$$[a, [x_1, x_2, \dots, x_l]] = [\mathsf{ad}(x_1), \dots, \mathsf{ad}(x_l)](a).$$

Далее, по лемме 4.1, выполняется

$$[\mathsf{ad}(x_1), \dots, \mathsf{ad}(x_l)](a) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{(\alpha,\beta)} (-1)^i \mathsf{ad}(x_{\beta(i)}) \odot \dots \odot \mathsf{ad}(x_{\beta(1)}) \odot \mathsf{ad}(x_{\alpha(1)}) \odot \dots \odot \mathsf{ad}(x_{\alpha(l-1)})\right)(a) =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{(\alpha,\beta)} (-1)^i [a, x_{\alpha(l-1)}, \dots, x_{\alpha(1)}, x_{\beta(1)}, \dots\ x_{\beta(i-1)}, x_{\beta(i)}].$$

Таким образом, предложение доказано.

□

Следствие 4.4. *Для любого набора $x_1, \dots, x_k, \dots, x_{k+l} \in L$, где $k, l \in \mathbb{N}$, выполняется равенство*

$$[[x_1, \dots, x_k], [x_{k+1}, \dots, x_{k+l}]] = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{(\alpha,\beta)} (-1)^i \left[x_1, \dots, x_k, x_{k+\beta(i)}, \dots, x_{k+\beta(1)}, x_{k+\alpha(1)}, \dots, x_{k+\alpha(l-i)}\right],$$

где вторая (внутренняя) сумма пробегает по всем шафлам $(\alpha, \beta) \in \mathsf{Sh}^1(l-i, i)$.

Доказательство. Достаточно взять $a = [x_1, \dots, x_k]$ и воспользоваться предыдущим предложением. □

Лемма 4.5. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Рассмотрим очевидное вложение $S_n \hookrightarrow S_{n+1}$. Тогда подмножество $T \subseteq S_n$ будет Якобиевым тогда и только тогда, когда его образ в S_{n+1} Якобиев.*

2. *Если $T_1, T_2 \subseteq S_n$ Якобиевы множества и $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, то $T_1 \cup T_2$ Якобиево.*

3. *Если $T \subset S_n$ Якобиево и $\pi \in S_n$, то πT Якобиево.*

4. *Множества S_n, A_n, и $B_n = S_n \setminus A_n$ Якобиевы.*

Доказательство. Пусть T' образ T в S_{n+1}. Тогда достаточность первого утверждения следует из следующей формулы

$$\sum_{\sigma\in T'}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)},x_{n+1}] = [\sum_{\sigma\in T}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}],x_{n+1}] = [0,x_{n+1}] = 0.$$

Легко проверить, что необходимость этого утверждения также верна.

Второе утверждение получается следующим образом:

$$\sum_{\sigma\in T_1\cup T_2}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}] = \sum_{\sigma\in T_1}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}] + \sum_{\sigma\in T_2}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}] = 0.$$

Далее, так как $\pi(x_{i_1}\dots x_{i_n}) = x_{\pi(i_1)}\dots x_{\pi(i_n)}$, а $\pi(-x_{i_1}\dots x_{i_n}) = -x_{\pi(i_1)}\dots x_{\pi(i_n)}$, то третье утверждение следует из того, что в сумме $\sum_{\sigma\in T}[x_{\pi(\sigma(1))},\dots,x_{\pi(\sigma(n))}]$ каждый элемент имеет противоположный.

Наконец, четвёртое утверждение доказывается индукцией по n. Для S_n имеем

$$\sum_{\sigma\in S_n}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}] = [\sum_{\sigma\in S_{n-1}}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n-1)}],x_1] + \dots + [\sum_{\sigma\in S_{n-1}}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n-1)}],x_n] = 0.$$

С одной стороны A_n Якобиево тогда и только тогда, когда B_n Якобиево, а с другой стороны индукционный переход очевиден из следующей формулы:

$$\sum_{\sigma\in A_n}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}] = \sum_{\sigma\in B_{n-1}}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n-1)},x_1] + \dots + \sum_{\sigma\in B_{n-1}}[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n-1)},x_n] = 0.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Замечание 4.6. *Если $T\subseteq S_n$ является Якобиевым подмножеством, то $T(1,2)$ снова является Якобиевым подмножеством. Это видно из равенства*

$$\beta_n(\mathsf{Sum}(T(1,2))) = \sum_{\pi\in T}[x_{\pi(2)},x_{\pi(1)},x_{\pi(3)}\dots,x_{\pi(n)}] = -\sum_{\pi\in T}[x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}] = 0.$$

Однако, можно привести очевидный пример того, что Якобиевы подмножества не выдерживают домножение справа на произвольные перестановки.

5 Якобиевы подмножества $T_{k,l}$ и базис ядра β_n.

Пусть $T\subseteq S_n$ и $x_1,\dots,x_n\in A$, где A — ассоциативная алгебра. Введём обозначение

$$\mathsf{Sum}\,(T) = \sum_{\pi\in T} x_{\pi(1)}\cdot\ldots\cdot x_{\pi(n)}.$$

Так как характеристика основного поля $\mathbb{Q}$ равна нулю, то множество $T\subseteq S_n$ будет Якобиевым тогда и только тогда, когда $\mathsf{Sum}\,(T)\in \mathrm{Ker}(\beta_n)$. Более того, $\mathsf{Sum}(T) = \mathsf{Sum}(T')$ тогда и только тогда, когда $T = T'$. Из этого следует, что для каждого элемента $x\in\gamma_n$, который раскладывается по базису с коэффициентами 0 и 1, существует единственное $T\subseteq S_n$ такое, что $\mathsf{Sum}(T) = x$.

5.1 Ответ на задачу 1.

Пусть $k, l \in \mathbb{N}$ и $k + l \leq n$. Пусть $(\alpha, \beta) \in \mathsf{Sh}^1(l-i, i)$, где $i = \overline{0, l-1}$. Рассмотрим следующие перестановки из S_n

$$\tilde{\tau}_{i,\alpha,\beta,k,l,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+i & k+i+1 & \cdots & k+l & k+l+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k & k+\beta(i) & \cdots & k+\beta(1) & k+\alpha(1) & \cdots & k+\alpha(l-i) & k+l+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Определим

$$\tau_{i,\alpha,\beta,k,l,n} = \tilde{\tau}_{i,\alpha,\beta,k,l,n} \circ (1,2)^i.$$

Для всех $(\alpha, \beta) \in \mathsf{Sh}^1(k-i, i)$, где $i = \overline{0, k-1}$, рассмотрим следующие перестановки из S_n

$$\tilde{\sigma}_{i,\alpha,\beta,k,l,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ \beta(i) & \cdots & \beta(1) & \alpha(1) & \cdots & \alpha(l-i) & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Обозначим за $\Phi \in S_n$ перестановку

$$\Phi(i) = \begin{cases} i+k, & \text{если } i \leq k, \\ i-k, & \text{если } k < i \leq n. \end{cases}$$

и определим

$$\sigma_{i,\alpha,\beta,k,l,n} = \tilde{\sigma}_{i,\alpha,\beta,k,l,n} \circ \Phi \circ (1,2)^i.$$

Наконец, для $k + l \leq n$ определим

$$T_{k,l,n} = \{\ \tau_{i,\alpha,\beta,k,l,n} \ \mid\ 0 \leq i \leq l-1,\ (\alpha,\beta) \in \mathsf{Sh}^1(l-i,i)\ \} \bigcup$$
$$\bigcup \{\ \sigma_{i,\alpha,\beta,k,l,n} \ \mid\ 0 \leq i \leq k-1,\ (\alpha,\beta) \in \mathsf{Sh}^1(k-i,i)\ \}$$

Если $n = k + l$, то вместо $T_{k,l,k+l} \subseteq S_{k+l}$ будем писать $T_{k,l}$.

Теорема 5.1. *Для любых $k, l \in \mathbb{N}$ таких, что $k + l \leq n$, множество $T_{k,l,n}$ является Якобиевым.*

Доказательство. В силу леммы 4.5, достаточно показать это утверждение для $n = k + l$. Если формально рассмотреть образ β_{k+l} множества $T_{k,l}$ то, следуя лемме 4.4, получим, что

$$\beta_{k+l}\left(\mathsf{Sum}\left(T_{k,l}\right)\right) = [[x_1, \ldots, x_k], [x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}]] + [[x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}], [x_1, \ldots, x_k]] = 0.$$

Таким образом, подмножество $T_{k,l,n} \subseteq S_n$ является Якобиевым. $\square$

5.2 Ответ на задачу 2.

Рассмотрим следующее множество $\{\theta_j \mid 2 \le j \le n\} \subseteq \gamma_n$ такое, что

$$\theta_j = x_1 \dots x_n + x_j[x_1, \dots, x_{j-1}]x_{j+1} \dots x_n.$$

Рассмотрим перестановку $\Theta_j \in S_j$ такую, что

$$\mathsf{Sum}\,(\Theta_i) = \theta_j.$$

Лемма 5.2. *Перестановка Θ_j совпадает с перестановкой $T_{j-1,1,n}$.*

Доказательство. Рассмотрим эти перестановки как подмножества S_j. Для доказательства леммы достаточно показать равенства элементов $\mathsf{Sum}\,(\Theta_j)$ и $\mathsf{Sum}\,(T_{j-1,1,n})$. Следуя лемме 4.1., получим, что

$$\mathsf{Sum}\,(T_{j-1,1,n}) = x_1 x_2 \dots x_j + \sum_{i=0}^{j-2} \sum_{(\alpha,\beta)} (-1)^i x_j x_{\beta(i)} \dots x_{\beta(1)} x_{\alpha(1)} \dots x_{\alpha(j-1-i)} =$$

$$= x_1 x_2 \dots x_j + x_j \sum_{i=0}^{j-2} \sum_{(\alpha,\beta)} (-1)^i x_{\beta(i)} \dots x_{\beta(1)} x_{\alpha(1)} \dots x_{\alpha(j-1-i)} = \theta_j|_{\gamma_j} = \mathsf{Sum}\,(\Theta_j)\,,$$

где вторая (внутренняя) сумма пробегает по всем шафлам $(\alpha,\beta) \in \mathsf{Sh}^1(l-i,i)$.

Таким образом,

$$\Theta_j = T_{j-1,1,n}.$$

$\square$

Теорема 5.3. *Множество*

$$\left\{\mathsf{Sum}\,(\sigma \circ T_{k,1,n}) \mid \sigma(k+1) = 1, 1 \le k \le n-1\right\}$$

является базисом $\mathrm{Ker}(\beta_n)$.

Доказательство. В статье ([1], стр. 211) показано, что множество

$$\left\{\mathsf{Sum}\,(\sigma \circ \Theta_j) \mid \sigma(j) = 1, 2 \le j \le n\right\}$$

образует базис $\mathrm{Ker}(\beta_n)$. По лемме 5.2 выполнено равенство $\Theta_j = T_{j-1,1,n}$. Таким образом, множество

$$\left\{\mathsf{Sum}\,(\sigma \circ T_{k,1,n}) \mid \sigma(k+1) = 1, 1 \le k \le n-1\right\}$$

является базисом $\mathrm{Ker}(\beta_n)$. $\square$

6 Тождества в алгебрах Ли.

В этой части статьи мы наглядно продемонстрируем полученные результаты.

1. Рассмотрим тождество, соответствующее Якобиеву подмножеству $T_{2,2}$.

   Пример 6.1. *В любой алгебре Ли выполняется тождество*

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_2, x_1, x_4, x_3] + [x_3, x_4, x_1, x_2] + [x_4, x_3, x_2, x_1] = 0.$$

2. Приведём ещё несколько примеров тождеств в алгебрах Ли, которые соответствуют Якобиевым подмножествам $T_{k,l}$:

- $T_{1,1}$:
$$[x_1, x_2] + [x_2, x_1] = 0;$$
- $T_{1,2}$:
$$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0;$$
- $T_{2,2}$:
$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_2, x_1, x_4, x_3] + [x_3, x_4, x_1, x_2] + [x_4, x_3, x_2, x_1] = 0;$$
- $T_{1,3}$:
$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_3, x_1, x_2, x_4] + [x_4, x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_4, x_3, x_2] + [x_2, x_3, x_4, x_1] = 0;$$
- $T_{2,3}$:
$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] + [x_2, x_1, x_4, x_3, x_5] + [x_2, x_1, x_5, x_3, x_4] +$$
$$+ [x_1, x_2, x_5, x_4, x_3] + [x_3, x_4, x_5, x_1, x_2] + [x_4, x_3, x_5, x_2, x_1] = 0;$$
- $T_{1,4}$:
$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] + [x_3, x_1, x_2, x_4, x_5] + [x_4, x_1, x_2, x_3, x_5] + [x_1, x_4, x_3, x_2, x_5] +$$
$$+ [x_5, x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_1, x_5, x_3, x_2, x_4] + [x_1, x_5, x_4, x_2, x_3] + [x_5, x_1, x_4, x_3, x_2] + [x_2, x_3, x_4, x_5, x_1] = 0;$$
- $T_{3,3}$:
$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] + [x_2, x_1, x_3, x_5, x_4, x_6] + [x_2, x_1, x_3, x_6, x_4, x_5] + [x_1, x_2, x_3, x_6, x_5, x_4] +$$
$$+ [x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3] + [x_5, x_4, x_6, x_2, x_1, x_3] + [x_5, x_4, x_6, x_3, x_1, x_2] + [x_4, x_5, x_6, x_3, x_2, x_1] = 0.$$

Это только малая часть тождеств, которые получаются с помощью Якобиевых подмножеств $T_{k,l}$, описание которых было явно представлено в этой работе.

Автор статьи выражает признательность сотруднику Лаборатории имени П.Л.Чебышева, к.ф.-м.н. Сергею Олеговичу Иванову за постановку задачи и полезное обсуждение.

Список литературы

[1] C. Reutenauer, Free Lie algebras, Oxford University Press, 1993.

Лаборатория
Непрерывного Математического Образования.

10 января 2016 года.

Работа выполнена при поддержке Джимми Пейджа, Сида Барретта, Лу Рида, Джона Фогерти, Джона Долтри, Джима Моррисона, и группы Eagles. Отдельная благодарность Павлу Соликову, Роберту Планту, коллективу Pink Floyd, Бобу Дилану и Дэвиду Боуи.