IV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Задача 1. Геометрическая вероятность

Пункты этой задачи связаны с расположениями различных случайно взятых геометрических фигур. Что в каждом конкретном случае следует подразумевать под случайной фигурой того или иного вида, находится во власти решающего задачу, хотя, безусловно, требует обоснований. Одно можно сказать наверняка: вероятность — это число от 0 до 1.

1) Пусть на плоскости задана квадратная решётка со стороной 1. Возьмём число $\varepsilon > 0$ и вокруг точек решётки построим круги радиуса ε. Какова вероятность для случайной точки не попасть в объединение этих кругов?

2) На плоскость, расчерченную параллельными прямыми на расстоянии h друг от друга падает случайный отрезок длины меньшей или равной a. Какова вероятность того, что этот отрезок пересечёт какую-то прямую? А каково математическое ожидание числа точек пересечения?

3) Та же задача, но теперь вместо отрезка на плоскость попадает крестик — пара отрезков одинаковой фиксированной длины a, пересекающихся в своих центрах и перпендикулярных друг-другу. А что будет, если угол между отрезками не равен $\pi/2$?

4) Пусть дан некий круг радиуса r. Какова вероятность того, что конец отрезка длины a лежит за пределами круга, если это случайный отрезок, чья середина лежит в круге?

5) Пусть плоскость замощена одинаковыми параллелограммами. На плоскость кидают случайный параллелограмм, среди тех

   а) у которых площадь меньше или равна S.

   б) у которых длина сторон меньше a.

   в) у которых длины диагоналей меньше a.

   Какова вероятность того, что вершина какого-то параллелограмма из замощения лежит в случайном параллелограмме?

6) А если рассмотреть случайный эллипс с такими условиями?

7) Рассмотрим случайный четырёхугольник с длинами сторон a, b, c, d. Какова вероятность, что он будет содержать точку из решётки? Какова вероятность, что он будет пересекаться с набором параллельных линий, расстояние между которыми равно h?

8) А что такое случайный n-угольник на плоскости с какими-то ограничениями? Какова вероятность для него содержать некоторую точку из решётки или пересекаться с семейством параллельных прямых?

Задача 2. Гипернатуральные числа

1) Рассмотрим натуральные числа $n \neq 1$, m_1 и m_2. Покажите, что $n^{m_1} - 1 \,\vdots\, n^{m_2} - 1$ тогда и только тогда, когда $m_1 \,\vdots\, m_2$.

2) Покажите, что для всех взаимнопростых чисел m и n существуют такие натуральные k и l, что $m^l - 1 \vdots n$ и $n^k - 1 \vdots m$.

3) Гипернатуральным числом назовём отображение из множества простых чисел $\mathbb{P}$ в множество $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Естественным образом каждому натуральному числу можно сопоставить такое отображение, а именно, если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, где p_i - различные простые, то соответствующее отображение задано формулой

$$n(q) = \begin{cases} \alpha_i, & q = p_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Также можно определить произведение, наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель по следующим формулам:

$$x_1 \cdot x_2(q) = x_1(q) + x_2(q),$$
$$\operatorname{lcm}(x_1, x_2)(q) = \max(x_1(q), x_2(q)),$$
$$\gcd(x_1, x_2)(q) = \min(x_1(q), x_2(q)).$$

Будем говорить, что $x \vdots y$, если $\forall q \in \mathbb{P}\ x(q) \geq y(q)$. Рассмотрим некоторое множество A гипернатуральных чисел. Определим наименьшее общее кратное всех элементов из A по формуле $\operatorname{lcm}(A)(q) = \sup\limits_{x \in A}\{x(q)\}$. Теперь для гипернатурального числа x и натурального n определим

$$n^x - 1 = \operatorname{lcm}\left(\{n^m - 1 \mid m \in \mathbb{N},\, x \vdots m\}\right).$$

Решите следующие задачи:

а) Вычислите $3^x - 1$, $5^x - 1$ и, в целом, $p^x - 1$, где p-простое, а $x = (\infty, \infty, \dots)$.

б) Верно ли, что $n^x - 1 = n^y - 1$ тогда и только тогда, когда $x = y$, где x и y гипернатуральные, $n \in \mathbb{N}$.

в) Покажите, что уравнение $3^x - 1 = 5^y - 1$ неразрешимо в гипернатуральных числах. Аналогично покажите, что уравнение $3^x - 1 = 11^y - 1$ не имеет гипернатуральных решений.

4) Пусть $l^\infty = \operatorname{lcm}(\{l^n \mid n \in \mathbb{N}\})$. Попробуйте найти $p^{l^\infty} - 1$ для некоторых простых p и l.

5) Попробуйте разобрать случай уравнения $p^x - 1 = l^y - 1$ для бесконечных серий простых чисел или дайте ответ для произвольных простых.

6) Бывают ли решения у уравнения $n^x - 1 = m^y - 1$, когда n и m взаимнопростые натуральные числа? А когда не взаимнопростые?

7) Попробуйте решить другие уравнения в гипернатуральных числах, например, $n^x - a = n^y - b$.

Задача 3. Шоколадки

Мальчик Коля пришёл в магазин выбирать шоколадку в поход. Так как вкусам своих товарищей он не видел возможности угодить, то Коля решил из всех шоколадок выбрать ту, которую проще всего поделить поровну. А именно, пусть шоколадка представляет собой прямоугольник $a \times b$, $a, b \in \mathbb{N}$, состоящий из $a \cdot b$ долек. Колю интересуют те формы шоколадок, где число долек делится поровну между участниками похода. Но вот беда, Коля точно не знает, сколько людей идёт в поход.

1) Считая, что в походе с одинаковой вероятностью могут оказаться от 2 до 10 человек, найдите все такие формы шоколадок из не более чем 100 долек, количество долек в которых с наибольшей вероятностью будет делиться на количество участников похода. Сколько различных конфигураций подойдёт? А если не более 50-ти долек?

2) При заданных ограничениях на размер шоколадки и на количество участников похода, те шоколадки, которые с наибольшей вероятностью делятся поровну, будем называть оптимальными. Решение с наименьшим числом долек будем назвать минимальной оптимальной шоколадкой.

   а) Покажите, что при фиксированном максимальном числе участников похода и росте ограничения на число шоколадок размер минимальной оптимальной шоколадки стабилизируется. Как описать размер (количество долек) минимальной шоколадки в зависимости от ограничения на число человек? Оцените, с какого места ограничение на размер не имеет значения.

   б) Покажите, что при фиксированной верхней оценке на размер шоколадки и росте возможного числа людей, количество долек в минимальной шоколадке стабилизируется. Опишите и оцените размер минимальной шоколадки после стабилизации.

   в) Сколько различных конфигураций для минимальных шоколадок из пунктов а) и б)?

3) Опишите алгоритм построения оптимальной шоколадки при заданных ограничениях. Какова сложность Вашего алгоритма?

4) Допустим теперь, что в магазине бывают не все шоколадки, а только вида $a \times b$, где $b \geq a \geq \varepsilon b$, для некоторого фиксированного $\varepsilon \leq 1$. Изменится ли количество долек в минимальной оптимальной шоколадке с таким условием? Оцените количество оптимальных шоколадок, удовлетворяющих этому условию.

5) Рассмотрим ситуацию, когда каждый из d людей, которым Коля предложил идти в поход, пойдут в него — i-ый с вероятностью $p_i \leq 1$. Будучи несколько ленивым, Коля хочет найти не самое оптимальное, а ε-оптимальное решение, то есть такую шоколадку, которая делится нацело между участниками с вероятностью в $\varepsilon \leq 1$ раз меньше, чем для оптимальной шоколадки. Предложите свои варианты решения этой задачи, если:

   а) Для всякого $1 \leq i \leq d$ $p_i = p < 1$.

   б) ε достаточно маленькое ($\varepsilon = \frac{1}{100}$).

Задача 4. Матрицы и периоды

1) Рассмотрим целочисленную матрицу 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмём некоторый целочисленный вектор $\binom{x}{y}$, натуральное число n и построим последовательность

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod n.$$

Здесь и далее под записью $\bmod n$ подразумевается взятие остатка от деления на n. Покажите, что эта последовательность будет чисто периодической, то есть существует такое $m \in \mathbb{N}$ со свойством $x_{k+m} = x_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Каков период этой последовательности в зависимости от x, y и n?

2) Рассмотрим целочисленную матрицу, некоторый начальный вектор и натуральное число n. Рассмотрим последовательность, аналогичную предыдущему пункту

$$x_k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod n.$$

а) Покажите, что эта последовательность не обязательно чисто периодическая.

б) Тем не менее, период у этой последовательности есть, то есть найдётся такое m, что для всех достаточно больших $k > N$ $x_{k+m} = x_k$.

в) Оцените период этой последовательности в зависимости от n. Достигается ли Ваша оценка для какой-либо матрицы?

г) Как описать те матрицы, последовательности для которых всегда будут чисто периодичны для любых x, y и n?

3) Рассмотрим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

а) Чему равны периоды последовательностей для начального вектора $\binom{1}{0}$, если число n — некоторое простое число?

б) Покажите, что если $n|l$, то тогда $\pi(n)|\pi(l)$, где $|$ означает то, что первое число делит второе, а $\pi(n)$, сокращение для $\pi(A, x, n)$, период последовательности, построенной по матрице A, начальному вектору x и некоторому n.

в) Попробуйте связать периоды по модулю n, m и nm.

4) Как изменится период, если для указанных выше матриц в качестве начального вектора взять не вектор $\binom{1}{0}$, а другой?

5) Рассмотрите аналогичную задачу для матриц произвольного размера.

Задача 5. Отмеченные точки

На плоскости отметим несколько точек $P_1, \ldots, P_n$. Будем пошагового добавлять новые точки по следующему правилу: если точки P и P', Q и Q' уже отмечены, а отрезки PP' и QQ' пересекаются по единственной точке N, то эта точка будет отмечена на следующем шаге, если не была отмечена ранее.

1) **а)** Покажите, что если изначально точек было не более 4, то после первого шага нельзя будет отметить ни одной новой точки.

б) Найдите все такие конфигурации изначальных точек, что после некоторого числа шагов точек добавить уже нельзя.

2) Покажите, что есть такая комбинация из более чем пяти точек, к которой после любого шага всё равно можно добавить точки.

3) Рассмотрим множество $M_i = M_{i,P_1,\ldots,P_n}$ — множество всех точек, которые были отмечены на шаге i, если мы стартовали с $P_1, \ldots, P_n$. Определим $M_\infty = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} M_i$ — множество всех точек добавленных на каком-либо шаге.

4) Дайте описание для $cl(M_\infty)$ — замыкания множества M_∞, где под замыканием множества A подразумевается множество всех точек x плоскости, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка $y \in A$ такая, что $\operatorname{dist}(x, y) < \varepsilon$, где $\operatorname{dist}(x, y)$ обозначает обычное расстояние. Покажите, что получившаяся фигура обязательно является выпуклым многоугольником в объединении с конечным числом точек.

5) Рассмотрим выпуклый многоугольник P с вершинами $P_1, \ldots, P_n$. Построим по этим вершинам множество $Q = cl(M_\infty)$. Каким может быть отношение площади Q к площади P?

6) Каково отношение площадей в случае правильного n-угольника для $n \geq 5$?

7) Рассмотрим выпуклый прямоугольник $ABCD$. Рассмотрим некоторую точку E внутри. При каком выборе E достигается максимум площади $cl(M_{\infty,A,B,C,D,E})$? Для параллелограмма? Для произвольного выпуклого четырёхугольника? Каково будет отношение площади получившегося множества к площади изначальной фигуры?

8) Исследуйте другие вопросы, связанные с площадями для многоугольников с большим числом сторон. Рассмотрите ситуацию в трёх измерениях — как нужно модифицировать определение?

9) Что будет, если исходных точек суть бесконечно много? Например, если исходное множество точек — это объединение нескольких кривых?

Задача 6. Раздутия и стягивания

1) Рассмотрение этой задачи мы начнём с описания некоторого множества преобразований отрезка $[0, 1]$ в себя. Число вида $\frac{k}{2^n}$, где $k, n \in \mathbb{Z}$ будем называть двоично-рациональным. Разбиением отрезка называется набор конечного числа точек в нём, а отрезки, соединяющие соседние точки между собой или крайние с концами отрезка — элементами разбиения. Будем называть отрезок $[a, b]$ диадическим, если $a = \frac{k}{2^n}$, а $b = \frac{k+1}{2^n}$, где $k, n \in \mathbb{N}$. Непрерывное отображение $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно-линейным, если существует разбиение отрезка $[a, b]$, так что $f(x) = qx + r$ для некоторых $q, r \in \mathbb{R}$ на каждом элементе разбиения. Кусочно-линейную непрерывную биекцию f из отрезка $[a, b]$ в отрезок $[c, d]$ такую, что найдётся разбиение $[a, b]$, что его элементы I_k — диадические отрезки, а $f|_{I_k}(x) = 2^n x + r$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}$, будем называть pl_2-преобразованием отрезка $[a, b]$ в отрезок $[c, d]$. Рассмотрим множество F, состоящее из всех pl_2-преобразований отрезка $[0, 1]$ в себя. Например, такая функция лежит в F:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

а) Покажите, что если $f \in F$, то $f(0) = 0,\ f(1) = 1$.

б) Покажите, что отображение из F переводит некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$ на диадические отрезки в новое разбиение $[0, 1]$ на диадические.

в) Покажите, что если $f, g \in F$, то $f \circ g \in F$.

г) Покажите, что если $f \in F$, то $f^{-1} \in F$.

д) Покажите, что если $f \in F$, $f \neq \mathrm{Id}_{[0,1]}$, тогда $f^{(n)} \neq \mathrm{Id}_{[0,1]}$. Иными словами, F образует группу относительно композиции, в которой нет элементов конечного порядка.

е) Покажите, что для любых двух разбиений отрезка $[0, 1]$ на одинаковое число диадических интервалов существует единственная $f \in F$, переводящая каждый элемент первого разбиения линейно в элемент второго.

ё) Покажите, что у любого такого преобразования $f \in F$ число неподвижных точек, не лежащих ни на каком неподвижном отрезке, конечно. Чем можно ограничить число этих неподвижных точек? А у $f^{(n)}$? Здесь $f^{(n)}$ обозначает композицию f с собой n раз.

ж) А сколько может быть различных неподвижных точек у преобразования, которое построено с помощью операции композиции из двух функций f, g в зависимости от числа их неподвижных точек?

з) Обобщите все указанные свойства на pl_2-преобразования между произвольными отрезками.

2) Циклическим pl_2-преобразованием $f\colon [a,b] \to [c,d]$ отрезков с двоично-рациональными концами называется отображение $f\colon [a,b] \to [c,d]$, разрывное не более чем в одной точке x_1, такое что $f(a) = f(b)$, $f(x_1) = d$, функция $f|_{[a,x_1]}$ — pl_2-преобразование на образ, а $g = f|_{(x_1,b]}$ — доопределяется до pl_2-преобразования на образ тем что $g(x_1) = c$. В частности, если точки разрыва нет, то это просто pl_2-преобразование.

а) Покажите, что такое отображение задаёт непрерывную биекцию из окружности длины $b - a$ в окружность длины $d - c$.

б) Определите композицию циклических pl_2-преобразований, так, чтобы оно было согласовано с композицией обычных pl_2-преобразований.

в) Покажите, что множество T всех циклических pl_2-преобразований $[0,1]$ в себя образует группу.

г) Опишите элементы конечного порядка в этой группе.

3) Покажите, что для любого отрезка $[a,b]$, $a = k/2^n$, $b = l/2^m$ существует pl_2-преобразование $f\colon [a,b] \to [0,1]$, $k, l, n, m \in \mathbb{Z}$.

4) Весом на отрезке $[0,n]$, $n \in \mathbb{N}$ назовём функцию $W\colon V \to \mathbb{Z}$, где $V = \{0, 1, \ldots, n\}$. Пусть даны отрезки $[0,n]$, $[0,n+1]$ и веса W, W_1 на них. Будем говорить, что эти два отрезка с весом связаны преобразованием раздутия в отрезке $[i,i+1]$, $i < n, i \in \mathbb{N}$, если для pl_2-преобразования $f\colon [0,n] \to [0,n+1]$, заданного по формуле

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,i] \\ 2x - i, & x \in [i,i+1] \\ x+1, & x \in [i+1,n] \end{cases}$$

и переводящего целые точки в целые, верно

$$W_1(k) = \begin{cases} W(f^{-1}(k)), & k \neq i, i+1, i+2 \\ W(f^{-1}(k)) - 1, & k \in \{i, i+2\} \\ -1, & k = i+1 \end{cases}.$$

Обратное преобразование f^{-1} назовём стягиванием точки $x = i+1$ на взвешенном отрезке $[0, n+1]$. Вес W на отрезке $[0,n]$ называется циклическим, если $W(0) = W(n)$. Если $i \neq 0, n-1$, то циклическое раздутие отрезка $[0,n]$ с циклическим весом W в отрезке $[i,i+1]$ - это просто раздутие в соответствующем отрезке (проверьте, что новый вес в этом случае тоже циклический). В случае $i = 0$, надо лишь уменьшить $W_1(n+1) = W(n) - 1 = W(0) - 1 = W_1(0)$, так, чтобы новый вес стал циклическим. В случае $i = n-1$ определим циклическое pl_2-преобразование

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0,n-1] \\ 2x - n + 2, & x \in [n-1, n-\frac{1}{2}] \\ 2x - 2n + 1, & x \in (n - \frac{1}{2}, n] \end{cases}.$$

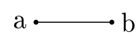
Веса вводятся так же, через формулы для прообразов и соотношение $W_1(n+1) = W_1(0) = -1$. Стягивание — обратное преобразование.

Теперь, если есть набор отрезков с весами $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$ и преобразований $f_i \colon \Gamma_{i-1} \to \Gamma_i$, каждое из которых либо раздутие, либо стягивание, то композиция $f_n \circ ... \circ f_1$ называется преобразованием $\Gamma_0 \to \Gamma_n$. Аналогично определим циклическое преобразование отрезков с циклическими весами. Отрезок с циклическим весом будем рисовать как замкнутую ломанную, где около вершин подписаны веса. Отрезок с весом, который нельзя стянуть, называется минимальным.

а) Какие pl_2-преобразования f получаются допустимыми для отрезка [0,1] и всех возможных весов на нём?

б) Покажите, что любой отрезок с весом преобразуется в минимальный. Аналогично для циклических весов и циклических преобразований. Единственным ли образом определён соответствующий минимальный отрезок с весом? Попробуйте найти какой-нибудь канонический минимальный отрезок с весом, в который преобразуется данный. Какая у него длина?

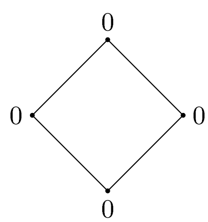
в) Покажите, что у взвешенного разбиения отрезка [0,1] с точками разбиения на концах



где $a, b \in \mathbb{Z}$ веса, нет нетривиальных преобразований в себя.

г) Покажите, что у любого взвешенного отрезка нет нетривиальных преобразований в себя. Но могут быть такие, которые меняют веса на концах.

д) Опишите группу циклических преобразований.



е) Попробуйте описать группу циклических преобразований любого отрезка с нулевыми весами.

5) Считая, что мы определили допустимые преобразования цепей и циклов как графов, дайте определения допустимых преобразований произвольных графов.

Задача 7. Учимся считать

F - произвольное поле, $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из n элементов по k.

1) Посчитайте, чему равно

$$-\binom{b+1}{0}\binom{b+c}{b-1}\binom{c+1}{c-1} + \binom{b+1}{1}\binom{b+c}{b}\binom{c+1}{c} - \binom{b+1}{2}\binom{b+c}{b+1}\binom{c+1}{c+1}.$$

Ответ будет заметно короче этого выражения!

2) Представьте следующие числа в виде произведения и частного некоторых факториалов:

$$\binom{4}{0}^3 - \binom{4}{1}^3 + \binom{4}{2}^3 - \binom{4}{3}^3 + \binom{4}{4}^3$$

и

$$\binom{6}{0}^3 - \binom{6}{1}^3 + \binom{6}{2}^3 - \binom{6}{3}^3 + \binom{6}{4}^3 - \binom{6}{5}^3 + \binom{6}{6}^3.$$

3) Попытайтесь как-то обобщить без строгого доказательства полученные результаты.

4) Посчитайте, чему равен коэффициент многочлена $[x^2y^2z^2](x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$, где $[\,]$ означает взятие коэффициента при соответствующем мономе. А $[x^2y^2z^2](x-y)(x-y-1)(y-z)(y-z-1)(z-x)(z-x-1)$? В каких целочисленных точках куба $(0 \le x \le 3) \times (0 \le y \le 3) \times (0 \le z \le 3)$ эти многочлены принимают ненулевые значения? Что можно сказать про значения этих многочленов в целых точках данного куба и про указанный коэффициент?

5) Докажите интерполяционную формулу Лагранжа: если C - произвольное подмножество F размера $d+1$, а f - многочлен степени не выше d, то

$$f = \sum_{a \in C} f(a) \prod_{c \in C, c \neq a} \frac{x-c}{a-c}.$$

6) Пусть $f \in F[x_1, x_2]$ - многочлен от двух переменных суммарной степени $deg(f) \le d_1 + d_2$, а C_1, C_2 - произвольные подмножества F размера $|C_i| \ge d_i + 1$. Тогда

$$\sum_{c_1 \in C_1} \sum_{c_2 \in C_2} \frac{f(c_1, c_2)}{\phi_1'(c_1)\phi_2'(c_2)} = [x_1^{d_1} x_2^{d_2}] f(x_1, x_2),$$

где $\phi_i(z) = \prod_{c \in C_i} (z - c)$.

7) Постарайтесь усилить и доказать теорему из пункта 6. Можете ли Вы придумать способ выразить коэффициент многочлена при произвольном мономе через его значение в заданных точках (как в предыдущем пункте, например)?

8) Постарайтесь посчитать, чему равен коэффициент многочлена $[x^ay^az^a](x-y)^a(y-z)^a(z-x)^a$ двумя разными способами и получить отсюда загадочное тождество.

9) Постарайтесь придумать тождество, обобщающее все тождества этой задачи, и доказать его.

Задача 8. Разрезания куба

1) Рассмотрим куб $3 \times 3 \times 3$. Мы хотим разрезать его на кубики $1 \times 1 \times 1$. За один раз можно сделать разрез в одной плоскости, при этом перед следующим разрезом можно переставлять в пространстве уже отрезанные части. За какое минимальное число разрезов можно справиться?

2) Рассмотрите теперь куб $n \times n \times n$. За сколько разрезаний можно справиться? Объясните, почему за меньшее число нельзя?

3) А сколькими разными способами можно произвести такое разрезание (способы различны, если на каком-то шаге от кубика отрезаны разные множества)? А если называть разрезания разными, когда на каком-то шаге в них отличаются наборы отрезанных фигур?

4) Рассмотрим равносторонний треугольник на плоскости с длиной стороны n. Мы хотим разрезать его на равносторонние треугольники с длинной стороны 1. За сколько разрезаний это возможно? Сколькими способами?

5) Рассмотрите аналогичную задачу для d-мерного куба и d-мерного симплекса.

6) Проверьте, что трёхмерный куб $n \times n \times n$ можно разрезать на $4n^3$ прямоугольных тетраэдров и n^3 правильных тетраэдров. Каково наименьшее число разрезаний?

7) Рассмотрите другие возможные разрезания.

Задача 9. Маляры

Графом $G = (V, E)$ называется множество V и симметричное отношение инцидентности $E \subset V \times V$. Множество V называется множеством вершин, а E — множеством ребер. Если $E \cap \{(v, v) | v \in V\} = \varnothing$, то говорят, что в графе нет петель. Мы будем рассматривать только такие графы.

Правильной раскраской графа G в n цветов называется отображение $col : V \to [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что никаким двум инцидентным вершинам не сопоставляется один и тот же цвет, то есть $(v, v') \in E \Rightarrow col(v) \neq col(v')$. Хроматическим числом графа G называется наименьшее n, для которого существует правильная раскраска в n цветов. Хроматическое число обозначается $\chi(G)$.

Пусть (M, d) — метрическое пространство. Положим, $V = M$ и $E = \{(m, m') \in M \times M \mid d(m, m') = 1\}$. Тогда по определению $\chi(M) = \chi(G)$, где $G = (V, E)$.

Во всех последующих пунктах через $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, через $\mathbb{R}^n$ обозначается метрическое пространство, точки которого являются упорядоченными наборами из n чисел, а расстояние определяется по формуле

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

Все подмножества $\mathbb{R}^n$ считаются метрическими пространствами с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрикой.

1) Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$, то есть плоскость нельзя раскрасить в 3 цвета. Предъявите раскраску плоскости в 7 цветов: $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

2) Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$.

3) Зафиксируем положительное число $\varepsilon < \sqrt{3/7}$. Покажите, что $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]) \leq 7$.

4) Зафиксируем положительное число $\varepsilon < 10^{-3}$. Покажите, что $\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^2) \geq 6$

5) Зафиксируем простое число p. Через $\mathbb{F}_p$ будем обозначать поле из p элементов. Пусть n — натуральное число, рассмотрим граф $G_n^p = (V_n^{(p)}, E_n^{(p)})$, где $V_n^{(p)} = (\mathbb{F}_p)^n$, а $E_n^{(p)} = \{(v, w) \in V_n^{(p)} \times V_n^{(p)} \mid v \cdot w = 1\}$, где

$$(v_1, \ldots, v_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j.$$

   Оцените $\chi(G_n^2)$, $\chi(G_n^3)$ при больших n.

6) Оцените $\chi(G_n^p)$ при больших n для произвольного p.

Задача 10. Как подгонять и не оплошать

В некотором конкурсе участвуют n команд из k участников. Команды уже отыграли, и осталось лишь определить победителя. При равенстве очков одно место может распределиться среди нескольких команд (как на математической олимпиаде).

Каждый участник команды заработал некоторую оценку из интервала $[0,1]$. Таким образом, результаты команд, исходя из которых надо их упорядочить, записаны невозрастающими последовательностями из k неотрицательных чисел. И для того, чтобы подвести итог, необходимо придумать функцию $f : [0,1]^k \to \mathbb{R}$, которая будет вычислять окончательный результат каждой команды.

А теперь — главный нюанс. Выбор этой функции целиком во власти жюри. Предположим, что некий член жюри, ответственный за выбор функции, пытается предложить капитанам команд подобрать f таким образом, чтобы команда этого капитана не оказалась, ммм..., в последних рядах.

Но не всё так просто. С одной стороны понятно, что стоит пообещать первое место наибольшему числу команд, однако, если ответственный обнадёжит тем, что потом не сможет сделать, то обиженная команда обязательно разболтает о его предложении.

Вдобавок, Комитетом По Защите Прав Олимпиадников установлены следующие правила: функция f должна иметь вид

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \left(\sum_{j=1}^{k} w_j x_j^l \right)^{1/l}$$

для некоторого вещественного числа $l \geq 1$ и весов $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_k > 0$.

1) Пусть $k = 3,\ n = 4$ и результаты оказались следующими:

$$(0.3, 0.1, 0.1),\ (0.2, 0.2, 0.1),\ (0.15, 0.14, 0.14),\ (0.13, 0.1, 0.1).$$

Стоит ли обещать помощь последней команде?

2) Будем говорить, что $(x_1, \ldots, x_k)$ мажорирует $(y_1, \ldots, y_k)$, если $\sum\limits_{i=1}^{j} x_i > \sum\limits_{i=1}^{j} y_i$ для любого j. Предположим, что ни для каких двух команд не верно, что результаты одной мажорируют результаты другой.

Какое максимальное число команд гарантировано можно вывести на первое место?

3) Пусть $A \subset [0,1]^k$ — некоторое открытое подмножество. Вероятностью того, что результаты данной команды попали в множество A, будем считать $|A|$, где $|A|$ — объем множества A. Результаты команд считаются независимыми в совокупности.

Пусть k, n и некоторое натуральное число j фиксированы. С какой вероятностью можно подобрать $l, w_1, \ldots, w_k$ для того, чтобы вывести на первое место ровно j команд?

Задача 11. Как бы поделить

1) Многочлен $f(x) \in F[x]$ с коэффициентами из поля F называется неприводимым, если все его делители в $F[x]$ имеют вид c, $cf(x)$, $c \in F \setminus \{0\}$. Покажите, что следующие многочлены неприводимы, как многочлены с рациональными коэффициентами:

а) $x^2 + 2bx + 1$, где $b \in \mathbb{Z}$, $|b| > 1$.

б) $x^4 + 1$.

2) Разложите на неприводимые множители $x^{18}-1$ над рациональными числами. Найдите нетривиальное разложение на множители числа $2^{18}-1$.

3) Хорошо известно, что многочлен $\Phi_n(x) = \prod_{(k,n)=1, k<n}(x - e^{2\pi ik/n})$ является многочленом с целыми коэффициентами и что $x^n - 1 = \prod_{d|n}\Phi_d(x)$. Покажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

4) Для каких n многочлен Φ_n, взятый по модулю простого p (что корректно, так как он с целыми коэффициентами), приводим в поле из p элементов? Например, при $p = 11$?

5) Покажите, что над полем из p элементов многочлен $x^p - x + 1$ неприводим. Покажите, что он является делителем $x^{p^p-1} - 1$. Делителем какого $\Phi_d(x)$ является $x^p - x + 1$?

6) Рассмотрим некоторый целочисленный многочлен $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$. Например, $g(y) = ay^n$. Для каких $g(y)$ и d многочлен $\Phi_d(g(y))$ не является неприводимым над $\mathbb{Q}$?

7) Что можно сказать, если вместо $\Phi_d(x)$ взять какой-то другой неприводимый многочлен? Можно ли взять $g(y)$ маленькой степени (меньше степени исходного многочлена)? Бесконечно ли число таких $g(y)$?

Задача 12. Выпуклые функции

Напомним, что функция $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,1]\quad tF(x) + (1-t)F(y) \geq F(tx + (1-t)y).$$

1) Хорошо известно, что выпуклая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ непрерывна. Покажите, что это выполнено и в случае большей размерности.

2) Теперь рассмотрим ситуацию похитрее. Пусть $d = 2$ и $f(x_1, x_2)$ выпукла по каждой координате в отдельности, то есть при фиксированном x_1 она выпукла, как функция от x_2 и наоборот. Покажите, что f непрерывна.

3) Покажите то же самое для $d > 2$.

4) Пусть F выпукла и положительно однородна порядка 1, т.е. $F(\lambda x) = |\lambda| F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^d$. Покажите, что такая функция неотрицательна.

5) Пусть функция $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой по каждой переменной и положительно однородна порядка 1. Докажите, что функция F неотрицательна.

6) Функция F называется липшицевой, если существует такая $L > 0$, что

$$|f(x) - f(y)| < L|x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Функция $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется субгармоничной, если для всякой точки x_0 и шарика Q с центром в точке x_0 $F(x_0) \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)} \int\limits_Q F(x)dx$, где $\mathrm{Vol}(Q)$ обозначает объём шара Q.

Пусть функция $F : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ липшицева, положительно однородна порядка 1, и для каждого $j \in [1, d]$ субгармонична по переменным (x_j, x_{j+d}). Докажите, что функция F неотрицательна, если:

а) d равно единице.

б) d — произвольное натуральное число.

7) Постройте контрпример для случая нечётной размерности. Например, в $\mathbb{R}^3$.