Ещё одно решение задачи Туэ о бесповторных словах

Борис Золотов (Санкт-Петербург, Россия)

1 Введение. Постановка задачи

В начале XX века норвежским математиком Акселем Туэ [1] была рассмотрена следующая задача. Требуется построить бесконечное слово над алфавитом минимальной возможной мощности такое, что в нем ни одно конечное подслово не повторяется дважды или трижды подряд — соответственно, такие слова называются бесквадратными или бескубными. Им же [1] была доказана возможность построения таких слов и приведены соответствующие примеры.

Решением этого же вопроса занимался английский математик Джон Лич [3]. Им был найден пример бесконечного бесквадратного слова, построенный при помощи равномерного морфизма ранга 13. Равномерным называется морфизм, при котором все буквы отображаются в слова равной длины; рангом равномерного морфизма называется длина этих слов.

В 1982 году была опубликована статья математика Макса Кречмора [4], в которой был приведён алгоритмически проверяемый критерий бесквадратности морфизма.

В настоящей работе получены новые результаты, позволяющие оптимизировать результаты Туэ и Лича и построить новые серии бесконечных бесповторных слов.

2 Известные результаты

Приведём результаты Туэ, Лича и Кречмора.

1) Первый пример бескубной последовательности (Туэ [1], 1906).

   Пусть $A = \{0; 1\}$; $a_0 = 1$; $f : 1 \longrightarrow 10, 0 \longrightarrow 01$;

   $a_0 = 1$

   $f(a_0) = 1\ 0$

   $f^2(a_0) = 10\ 01$

   $f^3(a_0) = 1001\ 0110$

   . . . .

   $f\infty(a_0) = 1001011001101001...$ — бесконечное бескубное слово, называемое последовательностью Туэ–Морса.

   Для этого морфизма Туэ [1] доказал ещё несколько свойств. Во-первых, неподвижная точка не содержит подслов вида $aXaXa$, которые называются *наложениями*. Во-вторых, данный морфизм всегда переводит бескубные слова в бескубные слова — такие морфизмы называются *бескубными*. И, наконец, слова без наложений он также переводит в слова без наложений — *сохраняет отсутствие наложений*. Морфизмы, обладающие этими свойствами, называются *морфизмами Туэ*.

2) Пример морфизма, порождающего бесконечное бесквадратное слово (Туэ [2], 1912).

   Пусть $A = \{1; 2; 3\}$; $a_0 = 1$; $f : 1 \longrightarrow 12312, 2 \longrightarrow 131232, 3 \longrightarrow 1323132$.

3) Равномерный морфизм, порождающий бесконечное бесквадратное слово (Лич [3], 1957).

   Пусть $A = \{1;2;3\}$; $a_0 = 1$;
   $f: 1 \longrightarrow 1232132312321, 2 \longrightarrow 2313213123132, 3 \longrightarrow 3121321231213.$

4) Критерий бесквадратности морфизма над трёхсимвольным алфавитом (Кречмор [4], 1984).

   Морфизм над трёхсимвольным алфавитом является бесквадратным — сохраняет отсутствие квадратов — тогда и только тогда, когда образ любого бесквадратного слова длины 5 бесквадратен.

5) Критерий бесквадратности равномерного морфизма над трёхсимвольным алфавитом (Кречмор [4], 1984)

   Равномерный морфизм над трёхсимвольным алфавитом является бесквадратным тогда и только тогда, когда образ любого бесквадратного слова длины 3 бесквадратен.

3 Основные определения

Алфавит, слово, морфизм

Под *алфавитом* понимается конечное множество, элементы которого называются *буквами*. *Слово над алфавитом* — последовательность букв из этого алфавита. Длина слова w — количество букв в данном слове — обозначается через $|w|$. Через $w[i]$ обозначается i–ая по порядку буква слова w.

Через $\overline{A}$ обозначим множество всех слов над алфавитом A. Если добавить к $\overline{A}$ операцию приписывания, то мы получим свободный моноид с пустым словом в качестве нейтрального элемента.

Морфизмом называется функция $f\colon \overline{A} \mapsto \overline{A}$, сохраняющая операцию приписывания:

$$\forall\, u, v \in \overline{A} \quad f(uv) = f(u)f(v).$$

Пусть L — натуральное число. Морфизм f называется L*–равномерным*, если для любой буквы $a \in A$ выполнено $|f(a)| = L$. Число L в этом случае называется *рангом* морфизма f.

Морфизм и неподвижная точка

Ввиду того, что морфизм f является автоморфизмом свободного моноида $\overline{A}$, для задания f достаточно задать образы элементов A.
Пример:

Пусть $A = \{1;2;3\}$. $x = 1231$ — слово над A.
$f: 1 \longrightarrow 1231, 2 \longrightarrow 3112, 3 \longrightarrow 1132.$
Тогда $f(1231) = f(1)f(2)f(3)f(1) = 1231\,3112\,1132\,1231.$

Понятно, что при действии на слово w равномерного морфизма f ранга r длина слова $f(w)$ будет кратна r. Тогда можно определить разбиение $f(w)$ на *канонические фрагменты* — непересекающиеся подслова длины r, покрывающие слово $f(w)$ и являющиеся образами букв из w.

Рассмотрим итерационную последовательность слов a_n такую, что $a_{n+1} = f(a_n)$. Если известно, что для любого натурального n выполнено $a_{n+1} = a_n V_n$, то существует бесконечное слово a такое, что выполнены следующие два свойства:

1) для любого натурального n выполнено $a = a_n W_n$;

2) $f(a) = a$.

В этом случае слово a называется *неподвижной точкой* морфизма f и обозначается $f\infty(a_1)$.

Возрастание и убывание, циклические морфизмы

Рассмотрим трёхсимвольный алфавит $A = \{1; 2; 3\}$. На нём определим *операции* '$\oplus 1$' и '$\ominus 1$' следующим образом:

$$\begin{array}{ll} 1 \oplus 1 = 2 & \quad 1 \ominus 1 = 3 \\ 2 \oplus 1 = 3 & \quad 2 \ominus 1 = 1 \\ 3 \oplus 1 = 1 & \quad 3 \ominus 1 = 2 \end{array}.$$

Если дано некоторое слово T над трёхсимвольным алфавитом, то можно определить слова $T \oplus 1$ и $T \ominus 1$ следующим образом:

$T \oplus 1$ — это такое слово, что
$$\forall i = \overline{1, |T|} \quad (T \oplus 1)[i] = (T[i]) \oplus 1;$$
$T \ominus 1$ — это такое слово, что
$$\forall i = \overline{1, |T|} \quad (T \ominus 1)[i] = (T[i]) \ominus 1.$$

Равномерный морфизм f ранга r будем называть *циклическим*, если
$$\forall\, p \in A \quad f(p \oplus 1) = (f(p)) \oplus 1.$$

Слово w длины l будем называть *возрастающим*, если
$$\forall\, i = \overline{1, l-1} \quad w[i+1] = w[i] \oplus 1.$$

Слово w длины l будем называть *убывающим*, если
$$\forall\, i = \overline{1, l-1} \quad w[i+1] = w[i] \ominus 1.$$

Свойства слов и морфизмов

Квадратом будем называть слово вида XX, где X не пусто. Пример — 123 123.

Слово будем называть *бесквадратным*, если оно не содержит квадратов.

Морфизм будем называть *бесквадратным*, если образ любого бесквадратного слова бесквадратен. Морфизм будем называть *k–бесквадратным*, если образ любого бесквадратного слова длины k бесквадратен.

Кубом будем называть слово вида XXX, где X не пусто. Пример — 123 123 123.

Слово будем называть *бескубным*, если оно не содержит кубов.

Морфизм будем называть *бескубным*, если образ любого бескубного слова бескубен.

Наложением будем называть слово вида $aXaXa$, в том числе когда X пустое. Пример — 2 123 2 123 2.

Слово будем называть *свободным от наложений*, если оно не содержит наложений.

Морфизм будем называть *сохраняющим отсутствие наложений*, если образ любого слова без наложений не содержит наложений.

Слабым квадратом будем называть слово вида $aXXa$, X может быть пустым. Пример — 3 123 123 3.

Слово будем называть *слабо бесквадратным*, если оно не содержит слабых квадратов.

Морфизм будем называть *слабо бесквадратным*, если образ любого слабо бесквадратного слова слабо бесквадратен.

Морфизм будем называть *морфизмом Туэ*, если он бескубен, свободен от наложений и порождает неподвижную точку $f\infty(a)$, где a — буква.

4 Цели работы

Поставим следующие вопросы:

1) Оптимален ли результат Лича? Существуют ли равномерные бесквадратные морфизмы с меньшим рангом?

2) Существуют ли равномерные морфизмы Туэ над трёхсимольным алфавитом?

3) Существуют ли слабо бесквадратные морфизмы Туэ над трёхсимвольным алфавитом?

4) Как связана слабая бесквадратность морфизма с другими возможными свойствами — например, с бесквадратностью?

5) Какие сочетания букв обязаны присутствовать в бесквадратных словах, при какой длине?

5 Основные результаты

Основными результатами работы являются следующие:

Собственные морфизмы
Были предложены для рассмотрения следующие морфизмы и исследованы их свойства:

1) Морфизм $f : 1 \longrightarrow 12321, 2 \longrightarrow 23132, 3 \longrightarrow 31213$ является бескубным и слабо бесквадратным морфизмом над трёхсимвольным алфавитом. Кроме того, он порождает неподвижную точку.

2) Морфизм $f : 1 \longrightarrow 1221, 2 \longrightarrow 2332, 3 \longrightarrow 3113$ является морфизмом Туэ над трёхсимвольным алфавитом.

3) Морфизм $f : 1 \longrightarrow 121, 2 \longrightarrow 232, 3 \longrightarrow 313$ является бескубным над трёхсимвольным алфавитом и порождает неподвижную точку.

Морфизмы малых рангов
Для равномерных морфизмов малых рангов были доказаны следующие теоремы:

4) Над трёхсимвольным алфавитом не существует равномерных слабо бесквадратных морфизмов Туэ ранга меньше 5.

5) Не существует слабо бесквадратных морфизмов Туэ над двухсимвольным алфавитом.

Слабая бесквадратность
Была доказана теорема о связи свойств морфизмов:

6) Любой равномерный, циклический, бесквадратный морфизм является слабо бесквадратным.

Морфизм Лича и оптимальные ранги
Были получены следующие результаты:

7) Существует ровно 144 равномерных бесквадратных морфизма ранга 11; не существует равномерных бесквадратных морфизмов с меньшим рангом.

8) Морфизм Лича является циклическим; не существует циклических бесквадратных морфизмов с меньшим рангом.

9) Морфизм Лича сохраняет отсутствие квадратов, кубов, наложений и слабых квадратов; не существует морфизмов с такими свойствами и меньшим рангом.

Сочетания в бесквадратных словах

Были рассмотрены сочетания над трёхсимвольным алфавитом и доказаны свойства:

10) Над трёхсимвольным алфавитом любое бесквадратное слово длины, большей 13, содержит все двубуквенные сочетания из различных букв.

11) Над трёхсимвольным алфавитом любое бесквадратное слово длины, большей 36, содержит все трёхбуквенные сочетания из различных букв (вида abc).

Итоги

Были получены ответы на все вопросы, поставленные в качестве Цели работы. Была найдена нижняя граница ранга бесквадратного морфизма над трёхсимвольным алфавитом и приведены все морфизмы, имеющие такой ранг.

Кроме того, было показано, что существуют слабо бесквадратные морфизмы Туэ над трёхсимвольным алфавитом; приведена нижняя оценка ранга морфизмов с такими свойствами. Также были приведены морфизмы малых рангов над трёхсимвольным алфавитом, обладающие не всеми из указанных свойств, что позволяет судить о независимости свойств друг от друга.

С другой стороны, было доказано, что из цикличности и бесквадратности морфизма вытекает слабая бесквадратность. Также были исследованы свойства буквенных сочетаний внутри бесквадратных слов.

Открытым остаётся вопрос существования равномерных слабо бесквадратных морфизмов Туэ ранга между 5 и 13.

6 Доказательство основных результатов. Собственные морфизмы

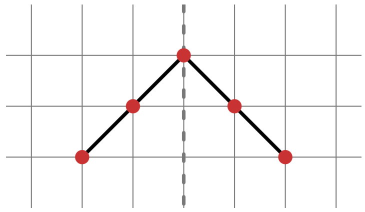
Лемма (0): *У морфизма f существует неподвижная точка $f\infty(u)$ (где u — буква) тогда и только тогда, когда $f(u) = uV$ для некоторого слова V.*

Докажем лемму методом математической индукции. Построим итерационную последовательность слов a_n такую, что $a_0 = u$ и $a_{k+1} = f(a_k)$. Требуется показать, что для любого k существует такое слово W, что $a_{k+1} = a_k W$.

База — $k = 0$ — дана нам в условии леммы. Индукционное предположение: пусть для некоторого k выполнено $a_{k+1} = a_k W$.

Тогда $a_{k+2} = f(a_{k+1}) = f(a_k W) = f(a_k)f(W) = a_{k+1}W'$. Таким образом, каждое слово последовательности a_n является префиксом следующего. В таком случае, у морфизма f действительно еть неподвижная точка $f\infty(u)$.

Теорема 1: *Морфизм* $f : 1 \longrightarrow 12321, 2 \longrightarrow 23132, 3 \longrightarrow 31213$ *над трёхсимвольным алфавитом является бескубным.*



канонический фрагмент морфизма f с точки зрения монотонности

Для доказательства теоремы нам потребуется серия лемм.

Лемма (1): *При действии морфизма f на бескубное слово образ этого слова не содержит куба какой-либо буквы.*

Пусть в образе слова есть три одинаковые буквы подряд. Тогда две из них обязательно лежат в одном каноническом фрагменте, а внутри канонического фрагмента любые соседние буквы различны.

Лемма (2): *При действии морфизма f на бескубное слово образ этого слова не содержит куба XXX, где длина X равна двум.*

Заметим, что в каноническом фрагменте $a_1a_2a_3a_4a_5$ выполняются следующие соотношения:

$$a_1 = a_5;$$
$$a_2 = a_4;$$
$$a_2 = a_1 \oplus 1;$$
$$a_3 = a_2 \oplus 1.$$

Теперь обозначим куб через $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$. Для того, чтобы покрыть куб из шести букв, достаточно двух канонических фрагментов; их обозначим через $a_1a_2a_3a_4a_5$ и $b_1b_2b_3b_4b_5$.

Рассмотрим все возможные случаи расположения c_1 в первом каноническом фрагменте.

1) $c_1 = a_1$. Тогда $c_3 = (c_1 \oplus 1) \oplus 1 = c_1 \ominus 1$. Получаем противоречие с тем фактом, что $c_3 = c_1$.
2) $c_1 = a_2$. Тогда слово c_1c_2 является возрастающим, а c_3c_4 — убывающим. Получаем противоречие с тем фактом, что данные слова равны между собой.
3) $c_1 = a_3$. Тогда слово c_1c_2 является убывающим, а c_5c_6 — возрастающим. Получаем противоречие с тем фактом, что данные слова равны между собой.
4) $c_1 = a_4$. Тогда слово c_1c_2 является убывающим, а c_3c_4 — возрастающим. Получаем противоречие с тем фактом, что данные слова равны между собой.
5) $c_1 = a_5$. Тогда слово c_3c_4 является возрастающим, а c_5c_6 — убывающим. Получаем противоречие с тем фактом, что данные слова равны между собой.

Таким образом, куб длины 6 не может начинаться ни с одной буквы канонического фрагмента. Лемма доказана.

Лемма (3): *При действии морфизма f на бескубное слово образ этого слова не содержит куба XXX, где длина X равна трём.*

Возможны несколько случаев расположения куба XXX внутри последовательности канонических фрагментов. Первый: второе вхождение X содержит вторую, третью и четвёртую буквы некоторого канонического фрагмента. Но в этом случае слово из двух последних букв X является одновременно возрастающим и убывающим; этот случай невозможен.

В остальных случаях легко проверить следующий факт: с какой бы позиции в каноническом фрагменте ни начинался куб, из трёх слов X длины 3 по крайней мере два окажутся подсловами канонических фрагментов — не будут пересекать их границу. Эти два слова X будут начинаться с разных позиций в своих канонических фрагментах, так как длина куба не кратна пяти.

Теперь заметим, что все различные трёхбуквенные подслова канонического фрагмента различаются с точки зрения возрастания / убывания. Этот факт делает невозможным существование куба XXX при длине X, равной 3.

Лемма (4): *При действии морфизма f на бескубное слово образ этого слова не содержит куба XXX, где длина X равна четырём.*

Для доказательства этой леммы, так же, как и для доказательства Леммы 2, следует рассмотреть пять случаев расположения первой буквы куба внутри канонического фрагмента, и для каждого случая получить противоречие: одно и то же подслово слова X окажется одновременно возрастающим и убывающим.

Лемма (5): *При действии морфизма f на бескубное слово образ этого слова не содержит куба XXX, где длина X кратна пяти.*

Действительно, морфизм f является циклическим. Для циклических морфизмов по любой букве внутри канонического фрагмента и её позиции в этом фрагменте можно определить, образом какой буквы этот канонический фрагмент является.

Заметим теперь, что соответственные буквы слов X находятся на одинаковых позициях в своих канонических фрагментах. Значит, и соответственные канонические фрагменты одинаковы. То есть, в слове–прообразе был куб, что противоречит условию леммы.

Лемма (6): *В любой последовательности канонических фрагментов рассматриваемого морфизма не существует квадрата XX, где длина слова X больше пяти и не кратна пяти.*

Докажем лемму от противного: пусть такой квадрат существует. Тогда каждое слово X содержит хотя бы по одному целому каноническому фрагменту. Кроме того, при сопоставлении двух слов X выяснится, что границы канонических фрагментов внутри одного из них сдвинуты относительно границ канонических морфизмов внутри другого.

Однако, можно заметить, что канонический фрагмент морфизма f обладает следующим свойством: при любом его сдвиге монотонность этого сдвига и исходного фрагмента будет вести себя по-разному. Иначе говоря, окажется, что одно и то же подслово в X должно быть одновременно возрастающим и убывающим, что невозможно.

Лемма доказана.

Пусть теперь образ некоторого бескубного слова при морфизме f содержит куб XXX. В леммах 1–6 разобраны все возможные случаи длины слова X и для каждого доказано, что куба с такой длиной повторения существовать не может.

Теорема доказана.

Теорема 2: *Морфизм* $f : 1 \longrightarrow 12321, 2 \longrightarrow 23132, 3 \longrightarrow 31213$ *над трёхсимвольным алфавитом является слабо бесквадратным.*

Лемма (7): *При действии морфизма f на слабо бесквадратное слово слово образ этого слова не содержит квадрата никакой буквы.*

Пусть квадрат буквы содержится в образе слабо бесквадратного слова. Две одинаковых буквы не могут попасть внутрь канонического фрагмента, так как внутри него соседние буквы различны. Значит, равные буквы являются крайними в двух соседних канонических фрагментах — но тогда эти канонические фрагменты равны между собой, и в слове–прообразе был квадрат буквы, который является слабым квадратом. Это противоречит условию леммы.

Лемма (8): *При действии морфизма f на слабо бесквадратное слово слово образ этого слова не содержит слабого квадрата $abba$, где a, b — буквы.*

Заметим, что вхождение bb не может быть подсловом канонического фрагмента, так как любые соседние буквы внутри канонического фрагмента различны. Значит, слабый квадрат $abba$

находится на границе двух канонических фрагментов, один из которых заканчивается на b, а другой начинается с b.

Однако, заметим, что ровно один канонический фрагмент может начинаться на b — это $f(b)$. Кроме того, $f(b)$ является единственным каноническим фрагментом, заканчивающимся на b. Это значит, что в слово–прообраз содержало слабый квадрат bb, что противоречит условию леммы.

Лемма (9): *При действии морфизма f на слабо бесквадратное слово слово образ этого слова не содержит слабого квадрата $aXXa$, где длина X равна двум.*

Докажем, что образ слова не может содержать квадрата XX при длине X, равной двум. Если такой квадрат содержится в слове–образе, то достаточно двух канонических фрагментов, чтобы покрыть его. Обозначим первый из этих двух канонических фрагментов через $a_1a_3a_3a_4a_5$ и рассмотрим случаи расположения в нём первой буквы квадрата.

1) Если первая буква квадрата является первой или второй буквой канонического фрагмента, то слово X должно быть одновременно возрастающим и убывающим, что невозможно.
2) Если первая буква квадрата является третьей буквой канонического фрагмента, то первые буквы двух слов X не могут совпадать, что невозможно.
3) Если первая буква квадрата является четвёртой буквой канонического фрагмента, то слово X должно быть одновременно возрастающим и убывающим, что невозможно.
4) Если первая буква квадрата является пятой буквой канонического фрагмента, то последние буквы двух слов X не могут совпадать, что невозможно.

Таким образом, лемма доказана.

Лемма (10): *При действии морфизма f на слабо бесквадратное слово слово образ этого слова не содержит слабого квадрата $aXXa$, где длина X равна трём.*

Докажем, что образ слова не может содержать квадрата XX при длине X, равной трём. Если такой квадрат содержится в слове–образе, то можно заметить — либо первые, либо последние буквы двух слов X лежат внутри одного канонического фрагмента.

Однако, две буквы внутри одного канонического фрагмента всегда будут различными, если разность их позиций равна трём. То есть либо первые, либо последние буквы двух слов X обязаны не совпадать, что невозможно.

Лемма (11): *При действии морфизма f на слабо бесквадратное слово слово образ этого слова не содержит слабого квадрата $aXXa$, где длина X равна четырём.*

Для начала заметим, что в образе слабо бесквадратного слова при морфизме f может содержаться квадрат XX, $|X| = 4$. А именно — $f(212) = 231\,3212\,3212\,3132$. Однако, этот квадрат не является слабым.

Для доказательства этой леммы достаточно перебрать 5 случаев расположения первой буквы слабого квадрата в каноническом фрагменте и для каждого случая получить противоречие в виде несовпадения соответственных букв слабого квадрата / различной монотонности для одного и того же подслова.

Лемма (12): *При действии морфизма f на слабо бесквадратное слово слово образ этого слова не содержит слабого квадрата $aXXa$, где длина X кратна пяти.*

Возможны два случая расположения слова XX внутри последовательности канонических фрагментов.

Первый случай — X является образом нескольких букв — $X = f(W)$. Мы рассматриваем слабый квадрат $a\,f(W)f(W)\,a$. То есть, первая буква a является последней, а вторая буква a — первой в каноническом фрагменте. Значит, эти канонические фрагменты в точности равны $f(a)$. Таким образом, в слове–прообразе присутствовал слабый квадрат $aWWa$, что невозможно по условию леммы.

Второй случай — слова X начинаются с одинаковых позиций внутри каких-то канонических фрагментов. Тогда эти канонические фрагменты одинаковы, и слово X обязано заканчиваться на букву a. В таком случае, внутри канонического фрагмента две соседние буквы должны быть равны a, что невозможно.

Пусть теперь образ некоторого слабо бесквадратного слова при морфизме f содержит слабый квадрат $aXXa$. Леммы 6–11 рассматривают все возможные случаи длины слова X и для каждого случая доказывают, что слабого квадрата с соответствующей длиной слова X в слове–образе существовать не может.

Теорема доказана.

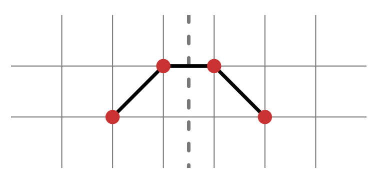
Теорема 3: *Морфизм* $f : 1 \longrightarrow 12321, 2 \longrightarrow 23132, 3 \longrightarrow 31213$ *над трёхсимвольным алфавитом порождает неподвижную точку* $f\infty(1)$.

Действительно, $f(1) = 1\,2321 = 1W$, как того и требует лемма (0).

Замечание: *Морфизм* $f : 1 \longrightarrow 12321, 2 \longrightarrow 23132, 3 \longrightarrow 31213$ *над трёхсимвольным алфавитом не является ни бесквадратным, ни сохраняющим отсутствие наложений.*

Действительно, $f(212) = 231\ 3\,212\,3\,212\,3\ 132$ содержит наложение, а, значит, и квадрат.

Теорема 4: *Морфизм* $f : 1 \longrightarrow 1221, 2 \longrightarrow 2332, 3 \longrightarrow 3113$ *над трёхсимвольным алфавитом является морфизмом Туэ.*



канонический фрагмент морфизма f
с точки зрения монотонности

Для доказательства этой теоремы нам также понадобится серия лемм.

Для того, чтобы морфизм являлся морфизмом Туэ, требуется бескубность, сохранение отсутствия наложений и существование неподвижной точки. У морфизма f в нашем случае, очевидно, существует неподвижная точка — $f\infty(1)$ — это явствует из Леммы (0): $f(1) = 1221 = 1W$.

В леммах (13)–(15) для морфизма f будет рассматриваться усиленная форма бескубности и отсутствия наложений. А именно — при действии морфизма на бескубное слово будет получаться слово без наложений соответствующей длины.

Такая форма действительно является усиленной, так как слово без наложений является бескубным.

Лемма (13): *При действии морфизма* $f: 1 \longrightarrow 1221, 2 \longrightarrow 2332, 3 \longrightarrow 3113$ *на бескубное слово образ этого слова не содержит куба какой-либо буквы.*

Пусть образ слова содержит куб буквы aaa. Тогда в любом случае две из этих трёх букв a окажутся крайними в одном каноническом фрагменте. По построению, две крайние буквы канонического фрагмента являются различными.

Лемма (14): *При действии морфизма* $f: 1 \longrightarrow 1221, 2 \longrightarrow 2332, 3 \longrightarrow 3113$ *на бескубное слово образ этого слова не содержит наложения* $aXaXa$*, где длина слова* X *равна единице.*

Действительно, пусть в слове–образе есть такое наложение. Длина этого наложения, очевидно, равна пяти. Для того, чтобы целиком покрыть это наложение, достаточно двух подряд идущих канонических фрагментов.

Заметим, что для любого канонического фрагмента $abcd$ верно тождество:
$$b = c = a \oplus 1 = d \oplus 1.$$

Из трёх букв a в наложении две обязательно попадут в один канонический фрагмент. Позиции этих двух букв в их каноническом фрагменте будут различаться ровно на 2. Но, по построению канонического фрагмента $abcd$, $a \neq c$ и $b \neq d$.

Тогда наложения длины 5 в образе бескубного слова не существует.

Лемма (15): *При действии морфизма* $f: 1 \longrightarrow 1221, 2 \longrightarrow 2332, 3 \longrightarrow 3113$ *на бескубное слово образ этого слова не содержит наложения* $aXaXa$*, где длина слова* X *равна двум.*

Действительно, пусть в слове–образе есть такое наложение. Длина его, очевидно, равна семи. Для того, чтобы целиком покрыть это наложение, достаточно трёх подряд идущих канонических фрагментов. обозначим эти фрагменты через $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$ и $c_1c_2c_3c_4$.

Рассмотрим случаи расположения двух слов X в трёх данных канонических фрагментах.

1) $a_2a_3 = b_1b_2$. Данные слова не могут быть равными, так как $a_2 = a_3$, но $b_2 = b_1 \oplus 1$.

2) $a_3a_4 = b_2b_3$. Данные слова не могут быть равными, так как $b_2 = b_3$, но $a_3 = a_4 \oplus 1$.

3) $a_4b_1 = b_3b_4$. В этом случае рассмотрим символы a, предшествующие словам X. $a = a_3 = a_4 \ominus 1$, и $a = b_2 = b_3$. Одновременно данные неравенства выполняться не могут, так как $b_3 = a_4$.

4) $b_1b_2 = b_4c_1$. В этом случае рассмотрим символы a, следующие за словами X. $a = b_3 = b_2$, и $a = c_2 = c_1 \oplus 1$. Одновременно данные неравенства выполняться не могут, так как $b_2 = c_1$.

Таким образом, наложения длины 7 в образе бескубного слова не существует.

Лемма (16): *При действии морфизма* $f: 1 \longrightarrow 1221, 2 \longrightarrow 2332, 3 \longrightarrow 3113$ *на слово без наложений образ этого слова не содержит наложения* $aXaXa$*, где длина слова* aX *кратна четырём.*

Для морфизма f, как и для любого циклического морфизма, выполняется однозначная определимость канонического фрагмента по букве и её позиции внутри него. Кроме того, очевидно, три буквы a находятся на одинаковых позициях внутри своих канонических фрагментов — хотя бы потому, что остатки от деления их голобальных позиций в слове на четыре равны между собой.

Далее — соответственные буквы слов X находятся на одинаковых позициях в канонических фрагментах и равны между собой. Значит, соответственные канонические фрагменты — образы букв — совпадают. Значит, в слове–прообразе было наложение, что противоречит условию леммы.

Абсолютно аналогично доказывается отсутствие в образе бескубного слова кубов XXX с длиной слова X, кратной четырём.

Лемма (17): *В любой последовательности канонических фрагментов морфизма f ни одно слово длины, большей 4 и не кратной 4, не может повторяться дважды подряд.*

Пусть в последовательности канонических фрагментов существует квадрат XX. Тогда каждое слово X содержит хотя бы по одному целому каноническому фрагменту. Кроме того, при сопоставлении двух слов X выяснится, что границы канонических фрагментов внутри одного из них сдвинуты относительно границ канонических морфизмов внутри другого.

Однако, можно заметить, что канонический фрагмент морфизма f обладает следующим свойством: при любом его сдвиге монотонность этого сдвига и исходного фрагмента будет вести себя по-разному. Иначе говоря, окажется, что одно и то же подслово в X должно быть одновременно возрастающим и убывающим, что невозможно.

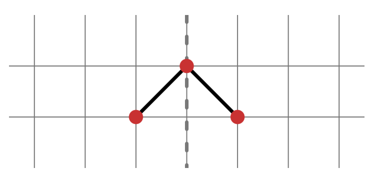
На основании доказанных лемм морфизм f действительно является морфизмом Туэ. Если в образе некоторого бескубного слова существует куб или в образе свободного от наложений слова существует наложение — соответствующая лемма доказывает, что кубов или наложений такой длины в образе слова быть не может.

Теорема доказана.

Замечание: *Рассмотренный морфизм f не является ни бесквадратым, ни слабо бесквадратным.*

Действительно, образ каждой буквы содержит квадрат и является слабым квадратом.

Теорема 5: *Морфизм* $f : 1 \longrightarrow 121, 2 \longrightarrow 232, 3 \longrightarrow 313$ *над трёхсимвольным алфавитом является бескубным и порождает неподвижную точку.*



канонический фрагмент морфизма f
с точки зрения монотонности

Лемма (18): *При действии морфизма f на бескубное слово его образ не содержит куба буквы*

Если бы образ слова содержал три одинаковых буквы подряд, то две из них обязательно попали бы в один канонический фрагмент. Внутри канонического фрагмента морфизма f любые соседние буквы различны.

Лемма (19): *При действии морфизма f на бескубное слово его образ не содержит куба XXX, где длина X равна двум.*

Дина куба XXX равна шести. Для того, чтобы покрыть куб длины 6, достаточно трёх канонических фрагментов; обозначим их через $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$ и $c_1c_2c_3$. Рассмотрим случаи расположения куба внутри данных канонических фрагментов.

1) $a_1a_2 = a_3b_1 = b_2b_3$. Данный случай недостижим, так как слово a_1a_2 возрастает, а b_2b_3 — убывает.

2) $a_2a_3 = b_1b_2 = b_3c_1$. Данный случай недостижим, так как слово b_1b_2 возрастает, а a_2a_3 — убывает.

3) $a_3b_1 = b_2b_3 = c_1c_2$. Данный случай недостижим, так как слово c_1c_2 возрастает, а b_2b_3 — убывает.

Как видим, куба длины 6 в образе бескубного слова существовать не может.

Лемма (20): *При действии морфизма f на бескубное слово его образ не содержит куба XXX, где длина X кратна трём.*

Доказательство проводим абсолютно аналогично леммам () и () — имеет место однозначная определимость канонического фрагмента по букве и позиции; соответственные буквы слов X находятся на равных позициях в своих канонических фрагментах; в слове–прообразе был куб.

Лемма (21): *При действии морфизма f на бескубное слово его образ не содержит куба XXX, где длина X больше трёх и не кратна трём.*

Заметим, что при длине канонического фрагмента, равной трём, и при данных условиях обязательно выполнено следующее: в любом случае одно из трёх слов X будет начинаться с первой буквы канонического фрагмента, и одно из трёх слов X будет начинаться со второй буквы канонического фрагмента.

Этот факт можно показать перебором случаев или из свойств группы вычетов по модулю 3.

Так как одно из слов X начинается с первой буквы канонического фрагмента, первые две буквы X образуют возрастающее слово; так как другое слово X начинается со второй буквы канонического фрагмента, первые две буквы X образуют убывающее слово. Получаем противоречие с невозможностью одновременного возрастания и убывания слова.

Лемма (22): *Морфизм f порождает неподвижную точку $f\infty(1)$.*

Это явствует из леммы (0): $f(1) = 121 = 1W$.

Таким образом, теорема доказана. Леммы (18)–(21) исчерпывают все возможные случаи длины куба и показывают, что в образе бескубного слова при морфизме f не может быть кубов такой длины.

Замечание: *Морфизм f не является ни бесквадратным, ни слабо бесквадратным, ни сохраняющим отсутствие наложений.*

1) $f(12) = 12\,12\,32$ — содержит квадрат;

2) $f(123) = 12\,1\,23\,23\,1\,3$ — содержит слабый квадрат;

3) $f(212) = 23\,2\,1\,2\,1\,2\,31$ — содержит наложение.

7 Морфизмы малых рангов

Лемма (23): *Если f — слабо бесквадратный морфизм Туэ над трёхсимвольным алфавитом, то все первые символы образов букв попарно различны; то же самое можно сказать про последние символы образов букв.*

Пусть это не так, и существуют такие буквы a,b, что

$$f(a) = xU,\ f(b) = xW.$$

Тогда $f(aab)$ содержит наложение $xUxUx$, что противоречит условию леммы.

Аналогично, если $f(a) = Ux$, $f(b) = Wx$, то $f(abb)$ содержит наложение $xWxWx$.

Заметим, что при доказательстве этой леммы мы пользовались только тем, что морфизм Туэ сохраняет отсутствие наложений. Таким образом, можно сказать, что *если морфизм f сохраняет отсутствие наложений, то все первые символы образов букв различны; все последние символы образов букв также различны.*

Лемма (24): *Если f — слабо бесквадратный морфизм Туэ над трёхсимвольным алфавитом, то в образе любой буквы первый и второй символ — различны; последний и предпоследний символ — различны.*

Из леммы (23) явствует, что для любой буквы трёхсимвольного алфавита есть такой канонический фрагмент, который с неё начинается. И если мы имеем $f(a) = Uxx$, то найдётся b такое, что $f(b) = xW$. $f(ab)$ в таком случае содержит куб, что противоречит условию леммы.

Второе предложение леммы доказывается аналогично.

Лемма (25): *Если f — слабо бесквадратный морфизм Туэ над трёхсимвольным алфавитом, то первый и последний символ образа любой буквы совпадают.*

Допустим противное — пусть существует такая буква a, что первая и последняя буквы $f(a) = xWy$. Тогда существует буква b такая, что $f(b) = yU$, причём $b \neq a$. Тогда $f(ab) = xWyyU$ — содержит слабый квадрат yy.

Теорема 6: *Не существует слабо бесквадратных равномерных морфизмов Туэ ранга меньше 5 над трёхсимвольным алфавитом.*

Предложение 1: *Не существует сохраняющих отсутствие наложений равномерных морфизмов ранга 2 над трёхсимвольным алфавитом.*

Допустим противное — нашёлся морфизм $f : a_1 \longrightarrow ab, a_2 \longrightarrow cd, a_3 \longrightarrow ef$, сохраняющий отсутствие наложений. В таком случае, по Лемме (1), $a \neq c \neq e$ и $b \neq d \neq f$.

Рассмотрим теперь образ свободного от наложений слова a_1a_1: $f(a_1a_1) = abab$. Чтобы aba не являлось наложением, нужно $b \neq a$. Аналогичным образом получаем, что первый и второй символы образа любой буквы различны.

Лишь в двух типах морфизмов выполнены полученные два свойства:

$$f_1 : a_1 \longrightarrow 12, a_2 \longrightarrow 23, a_3 \longrightarrow 31,$$
$$f_2 : a_1 \longrightarrow 13, a_2 \longrightarrow 21, a_3 \longrightarrow 32.$$

Покажем, что ни f_1, ни f_2 не сохраняет отсутствие наложений.

1) $f_1(a_1a_3a_2a_1a_3a_2) = 123123123123$ — содержит куб, а, значит, и наложение;

2) $f_2(a_1a_2a_3a_1a_2a_3) = 132132132132$ — содержит куб, а, значит, и наложение.

Предложение 2: *Не существует слабо бесквадратных равномерных морфизмов Туэ ранга 3 над трёхсимвольным алфавитом.*

Пусть существует слабо бесквадратный морфизм Туэ f ранга 3. Морфизм f порождает неподвижную точку — значит, образ хотя бы какой-то буквы начинается с неё самой. Для определённости, пусть $f(1)$ начинается с единицы. Из леммы (24), $f(1) = 12u$ или $f(1) = 13u$; эти случаи равноценны, рассмотрим первый.

Из леммы (25), $f(1) = 121$. Тогда канонический фрагмент, начинающийся на 2, имеет в середине тройку (не 2 и не 1) — $f(a_2) = 232$; канонический фрагмент, заканчивающийся на 3, имеет в середине единицу. Имеем:

$$\begin{gathered} f(1) = 121 \\ f(a_2) = 232 \\ f(a_3) = 313. \end{gathered}$$

Но тогда $f(a_3 1 a_2) = 31\,3\,12\,12\,3\,2$ — содержит слабый квадрат.

Таким образом, предложение доказано.

Предложение 3: *Не существует слабо бесквадратных равномерных морфизмов Туэ ранга 4 над трёхсимвольным алфавитом.*

Допустим противное — морфизм f с такими свойствами существует. Аналогично предыдущему предложению, имеет смысл рассматривать только ситуацию, когда $f(1)$ начинается со слова 12. В таком случае, согласно лемме (25), $f(1) = 1231$.

Легко видеть, что $f(a_2)$ есть либо 2132, либо 2312; $f(a_3)$ есть либо 3123, либо 3213.

Случай, когда $f(a_2) = 2312$, невозможен: $f(1a_2) = 1\,2\,31\,2\,31\,2$ — содержит наложение. Значит, $f(a_2) = 2132$. Теперь заметим, что при таком значении $f(a_2)$ невозможно выполнение $f(a_3) = 3213$ — тогда $f(a_3 a_2) = 3\,21\,3\,21\,3\,2$ содежит наложение.

Имеем единственный возможный морфизм:

$$\begin{gathered} f(1) = 1231 \\ f(a_2) = 2132 \\ f(a_3) = 3123. \end{gathered}$$

Но в таком случае $f(a_3 1) = 3\,1\,23\,1\,23\,1$ — содержит наложение.

Таким образом, разобраны случаи рангов 2, 3 и 4 — теорема доказана.

Лемма (26): *Над двухсимвольным алфавитом не существует одновременно бескубных и слабо бесквадратных слов длины больше пяти.*

Действительно, если слово слабо бесквадратно, то оно не содержит квадратов букв. То есть после буквы 1 всегда должна идти буква 0, а после буквы 0 — всегда буква 1.

Руководствуясь этими правилами, уже при длине 6 мы получим куб 101010 или 010101.

Теорема 7: *Не существует слабо бесквадратных морфизмов Туэ над двухсимвольным алфавитом.*

Допустим противное — пусть существует слабо бесквадратный морфизм Туэ f над двухсимвольным алфавитом. Он порождает неподвижную точку $A = f\infty(a)$; через A_n обозначим последовательность, из которой эта неподвижная точка была получена.

Длина слов A_n стремится к бесконечности — значит, начиная с некоторого места она будет больше шести.

Слово a из одной буквы не содержит ни наложений, ни слабых квадратов, но какое-то слово A_N обязательно содержит либо то, либо другое. Значит, f не является морфизмом Туэ.

8 Слабая бесквадратность

Теорема 8: *Любой циклический бесквадратный морфизм над трёхсимвольным алфавитом является слабо бесквадратным.*

Для доказательства данной теоремы нам потребуется серия лемм.

Лемма (27): *Прообраз слова со слабым квадратом при бесквадратном морфизме — слово с квадратом.*

Действительно, в слове со слабым квадратом есть квадрат, а образ бесквадратного слова при бесквадратном морфизме бесквадратен.

Лемма (28): *Если морфизм f — бесквадратный и циклический, то для любой буквы a из алфавита крайние буквы её образа $f(a)$ одинаковы.*

Докажем лемму от противного: пусть в алфавите существует такая буква a, образ которой начинается на букву x, а заканчивается на y. Из свойств трёхсимвольного алфавита — y есть либо $x \oplus 1$, либо $x \ominus 1$.

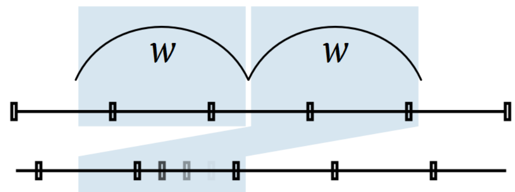
Без ограничения общности можем считать, что $y = x \oplus 1$. Значит, по определению циклического морфизма, образ буквы $a \oplus 1$ будет начинаться с y. Но тогда в образе бесквадратного слова $a(a \oplus 1)$ будет содержаться квадрат yy. А морфизм, по условию, является бесквадратным.

Лемма (29): *Если морфизм f — бесквадратный и циклический, то в образе любого слабо бесквадратного слова не будет квадрата ww такого, что длина слова w не кратна рангу морфизма f.*

Докажем лемму от противного: пусть такой квадрат найдётся. Тогда слово w имеет длину либо строго меньше, либо строго больше ранга морфизма. Эти случаи имеет смысл рассмотреть отдельно.

1) Если длина w меньше ранга морфизма, то квадрат ww является подсловом образа трёх последовательных букв. На не более чем трёхбуквенных словах слабая бесквадратность эквивалентна обычной — образ трёхбуквенного слабо бесквадратного подслова будет слабо бесквадратен; ни о каком квадрате ww не может быть и речи.

2) Если длина w больше ранга морфизма, то квадрат ww целиком покрывает как минимум два канонических фрагмента; каждое слово w — как минимум по одному. Тогда можно утверждать, что монотонность внутри последовательности канонических фрагментов ведёт себя так же, как и внутри последовательности сдвинутых канонических фрагментов (см. рисунок).



И, строго говоря, модуль этого сдвига равен
$$\min\Big(\,|w| \bmod |f(a)|\,;\ |f(a)| - (|w| \bmod |f(a)|)\Big)$$

Таким образом, последовательность канонических фрагментов можно продолжать сдвигать и сдвигать, получая одинаковый вид монотонности на общей внутренности канонических фрагментов.

В конечном итоге мы получим разбиение канонического фрагмента циклического морфизма на отрезки — и на всех отрезках возрастание / убывание будет вести себя одинаково. Длина такого отрезка, из теории делимости, будет равна наибольшему общему делителю длины $f(a)$ и модуля сдвига.

При том, что возрастание / убывание на отрезках ведёт себя одинаково, два соседних отрезка в каноническом фрагменте не могут полностью совпадать — тогда в образе буквы при бесквадратном морфизме будет содержаться квадрат. Легко видеть — отрезки, на которые мы бьём канонический фрагмент, будут иметь вид S, $S \oplus 1$, $S \ominus 1$.

Так как длина отрезка равна НОД-у длины $f(a)$ и какого-то строго меньшего числа, в каждом каноническом фрагменте есть как минимум два отрезка.

(а) Пусть в образе $f(a)$ их ровно два. Тогда пускай, для определённости, они имеют вид S и $S \oplus 1$.Тогда образы других двух букв имеют вид $f(b) = (S \oplus 1)(S \ominus 1)$ и $f(c) = (S \ominus 1)S$. В таком случае $f(bac) = (S \oplus 1)(S \ominus 1)S\,(S \oplus 1)(S \ominus 1)S$ — содержит квадрат. По условию же, морфизм f бесквадратен.

(б) Если же образ $f(a)$ разбит больше чем на два отрезка, то заметим: края любых двух соседних отрезков связаны одинаковым соотношением в плане монотонности, так как получены сдвигом внутри составляющей квадрата w. Причём, соотношение это такóво, что края отрезков различны, и сами соседние отрезки также различны.

Пусть, для определённости, каждый следующий отрезок канонического фрагмента есть предыдущий, увеличенный на 1. Помним, что в каждом каноническом фрагменте есть как минимум три отрезка.

Тогда возьмём второй канонический фрагмент такой, что отрезки в нём продóлжат последовательность отрезков в первом. Это будет другой канонический фрагмент, так как последний символ первого и первый символ второго будут различными, а у нас есть Лемма (2).

Тогда на границе двух канонических фрагментов мы имеем
$$\dots\ S(S \oplus 1)(S \ominus 1)\ S(S \oplus 1)(S \ominus 1)\ \dots,$$
что является квадратом. Получаем противоречие с бесквадратностью морфизма f.

Таким образом, лемма доказана.

Лемма (30): *Если морфизм f — бесквадратный и циклический, то в образе любого слова не будет слабого квадрата $aXXa$ такого, что длина слова X кратна рангу морфизма f, и при этом границы слов X не являются границами какого-либо канонического фрагмента.*

Про циклические морфизмы известен следующий факт: данная буква на данной позиции в каноническом фрагменте однозначно определяет, образом какой буквы этот фрагмент является. Таким образом, если две границы и один «раздел» слов X лежат в канонических фрагментах x_i, x_j и x_k — то эти границы будут находиться на одинкаовых позициях; канонические фрагменты окажутся одинаковыми.

Это значит, что слово X заканчивается на букву a, так как конец X имеет с буквой a одинаковую позицию в равных канонических фрагментах. Тогда, понятно, X и начинается на букву a.

Тогда внутри канонического фрагмента есть квадрат aa, что противоречит бесквадратности морфизма. Лемма доказана.

Таким образом, если f — циклический бесквадратный морфизм, то квадрат в образе слабо бесквадратного слова (по леммам 1–4) может быть лишь образом квадрата. Тогда рассмотрим два «соседних» с квадратом канонических фрагмента — если данный квадрат является слабым, то конец одного и начало другого — одна и та же буква.

То есть это равные канонические фрагменты. То есть, в слове–прообразе был слабый квадрат.

Теорема доказана.

Следствие: *Так как морфизм Лича — циклический и бесквадратный, то он является слабо бесквадратным.*

Таким образом, морфизм Лича удовлетворяет всем рассматриваемым в данной статье свойствам — сохраняет отсутствие кубов, наложений, квадратов и слабых квадратов; порождает неподвижную точку.

Замечание: *Над двухсимвольным алфавитом существует слабо бесквадратный морфизм:*

$$f : 0 \longrightarrow 01, 1 \longrightarrow 01.$$

Морфизм $f : 0 \longrightarrow 01, 1 \longrightarrow 10$ не является слабо бесквадратным: $f(10)$ содержит слабый квадрат. В теореме 7 доказано, что не существует слабо бесквадратных морфизмов Туэ над двухсимвольным алфавитом.

9 Морфизм Лича и оптимальные ранги

Теорема 9: *Над трёхсимвольным алфавитом существует ровно 144 равномерных бесквадратных морфизма ранга 11; не существует равномерных бесквадратных морфизмов с меньшим рангом.*

Данный результат был получен автором с помощью собственной программы на языке Objective Caml. В статье [4] приведён критерий бесквадратности равномерного морфизма над трёхсимвольным алфавитом. Критерий утверждает, что для бесквадратности морфизма достаточно бесквадратности образов всех бесквадратных трёхбуквенных слов.

Бесквадратность слова проверялась с помощью функции `squarefree_check`. Она имеет сложность $O(n^2)$, что нам, впрочем, непринципиально.

```
let squarefree_check str =
  let res = [|true|] in
  let l = String.length str in
    for i=0 to l-2 do (
      for m=1 to (l-i)/2 do (
      if (String.sub str i m = String.sub str (i+m) m)
        then (res.(0) <- false)
      ) done
    ) done;
  res.(0);;
```

Здесь внутри массива `res` хранится промежуточный результат, а строка

```
if (String.sub str i m = String.sub str (i+m) m)
then (res.(0) <- false)
```

в точности проверяет наличие в слове квадрата длины $2m$, начинающегося с позиции i.

Далее создавался массив всех бесквадратнатных слов длины 11. Образы букв при морфизме выбирались из этого массива; проводилась проверка на бесквадратность. Если морфизм оказывался бесквадратным, образы букв выводились на экран.

Целиком исходный код программы приведён в Приложении.

Предложение: *Существует два бесквадратных морфизма ранга 11 над трёхсимвольным алфавитом, таких, что остальные морфизмы получаются из них с помощью естественных операций, а именно:*

$$f_1 : 1 \longrightarrow 12131232123, 2 \longrightarrow 13212321323, 3 \longrightarrow 13213121323;$$
$$f_2 : 1 \longrightarrow 12313231213, 2 \longrightarrow 12321231213, 3 \longrightarrow 23132123213.$$

Докажем этот факт. Пусть σ — любая из шести перестановок множества $\{1, 2, 3\}$. Через $\overline{\sigma}$ обозначим индуцированный ею морфизм. Пусть ι — инверсия, то есть функция, которая каждому слову ставит в соответствие его же в обратном порядке.

Если f — равномерный бесквадратный морфизм, то $\iota \circ f$, $f \circ \overline{\sigma}$ и $\overline{\sigma} \circ f$ — также равномерные бесквадратные морфизмы.

Для одного морфизма f существует $6 \cdot 6 = 36$ бесквадратных морфизмов вида $\overline{\sigma_1} \circ f \circ \overline{\sigma_2}$ и 36 бесквадратных морфизмов вида $\iota \circ \overline{\sigma_1} \circ f \circ \overline{\sigma_2}$.

Показано, что для двух бесквадратных морфизмов ранга 11:

$$f_1 : 1 \longrightarrow 12131232123, 2 \longrightarrow 13212321323, 3 \longrightarrow 13213121323;$$
$$f_2 : 1 \longrightarrow 12313231213, 2 \longrightarrow 12321231213, 3 \longrightarrow 23132123213,$$

любой другой бесквадратный морфизм ранга 11 имеет вид $\overline{\sigma_1} \circ f_i \circ \overline{\sigma_2}$ либо $\iota \circ \overline{\sigma_1} \circ f_i \circ \overline{\sigma_2}$.

Замечание: *Нижняя граница 11 для ранга бесквадратных морфизмов над трёхсимвольным алфавитом уже была получена в работе [8].*

В работе также приведён морфизм, полученный инверсией f_2. Следует заметить, что данный в настоящей статье результат получен независимо от [8], и, кроме того, в настоящей статье приведён список всех бесквадратных морфизмов, достигающих нижнюю границу ранга.

Теорема 10: *Над трёхсимвольным алфавитом не существует циклических бесквадратных морфизмов ранга меньше 13.*

Из Предложения явствует, что ни один равномерный бесквадратный морфизм ранга 11 не является циклическим. Для морфизмов ранга 12 мы можем составить список всех бесквадратных и также проверить их на цикличность.

Теорема 11: *Не существует равномерных одновременно бесквадратных, бескубных и сохраняющих отсутствие наложений морфизмов ранга меньше 13.*

В статьях [6]–[8] приведены критерии бескубности и сохранения отсутствия наложений для морфизмов над трёхсимвольным алфавитом. Автором блыи написаны программы, аналогичные программам для бесквадратности, проверяющие факт, заявленный в условии теоремы.

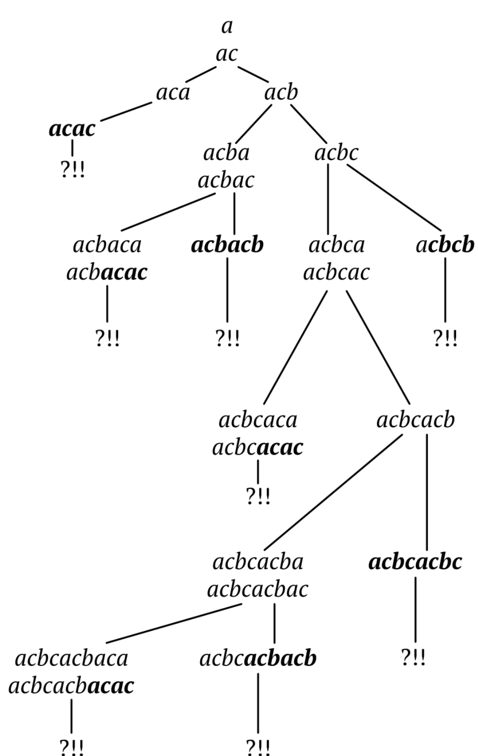
10 Сочетания в бесквадратных словах

Двубуквенным сочетанием будем называть любое слово длины 2. Над трёхсимвольным алфавитом существует шесть бесквадратных двубуквенных сочетаний: ab, ac, ba, bc, ca и cb. Нас будет интересовать следующий вопрос: можно ли обойтись без какого-либо бесквадратного двубуквенного сочетания при построении бесквадратного слова над трёхсимвольным алфавитом?

Теорема 12: *Над трёхсимвольным алфавитом любое бесквадратное слово длины, большей 13, содержит все двубуквенные сочетания из различных букв.*

Докажем теорему от противного. Будем пытаться построить бесквадратное слово, не используя двубуквенное сочетание ab.

Заметим, что нельзя построить бесквадратное слово длины больше трёх, используя только буквы b и c. То есть не позднее, чем на четвёртой позиции, нам встретится буква a. Мы знаем, что после буквы a может следовать только буква c, а после b и c — любая буква, отличная от данной. Руководствуясь этими правилами, будем строить все возможные бесквадратные слова, пока не придём к словам с квадратами.



Таким образом имеем *bcba cbca cbaca* — самое длинное бесквадратное слово без сочетания *ab*. И его длина равна тринадцати.

Теорема доказана.

Замечание: *Над алфавитом мощности больше трёх существуют сколь угодно длинные бесквадратные слова без определённого двубуквенного сочетания.*

Действительно, пусть мы хотим построить бесквадратное слово без сочетания *ab*.

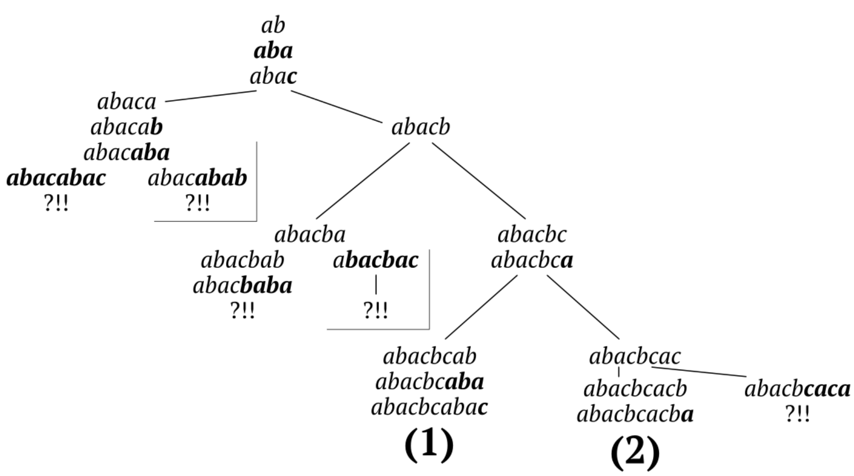
Данный нам алфавит с исключённой буквой *a* является как минимум трёхбуквенным — значит, над ним можно построить сколь угодно длинное бесквадратное слово. Оно не будет содержать букву *a*, а, значит, и никакие двубуквенные сочетания с ней.

Что и требовалось показать.

Аналогично тому, как мы ввели понятие двубуквенного сочетания, введём понятие трёхбуквенного сочетания. Трёхбуквенным сочетанием будем называть любое слово длины 3. Зададимся вопросом: какие трёхбуквенные сочетания обязаны присутствовать в бесквадратных словах?

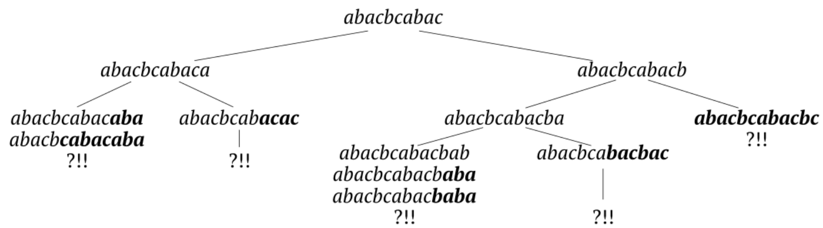
Теорема 13: *Над трёхсимвольным алфавитом любое бесквадратное слово длины, большей 36, содержит все трёхбуквенные сочетания из различных букв (вида abc).*

Теорему будем доказывать от противного: попробуем построить как можно более длинное бесквадратное слово без трёхбуквенного сочетания *abc*. По **Теореме 1**, не позднее чем на двенадцатой позиции нам встретится двубуквенное сочетание *ab*. Зная, что после него может следовать только буква *a*, продолжим строить бесквадратное слово.

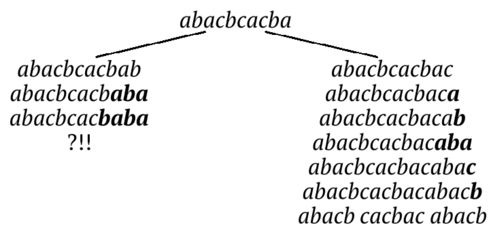


Таким образом, на данном этапе нам известно, что бесквадратное слово, начинающееся с *ab* и не имеющее в себе сочетания *abc*, может иметь вид *abacbcabac..* либо *abacbcacba..* . Отдельно рассмотрим данные случаи.

В первом случае мы всегда рано или поздно придём к квадрату:



Остался второй случай:



Заметим, что единственное бесквадратное на данном этапе слово заканчивается на $abacb$. Возвращаясь к основному дереву случаев данного пункта, видим, что все дочерние случаи $abacb$ сводятся либо к квадратам, либо к этому же слову.

Самое длинное дочернее бесквадратное слово для $abacb$ — $aba\,cbc\,aba\,cbab$, его длина равна 13. Прибавляя 13 к длине слова $abacb\,cacbac$, получаем 24. Теперь вспомним, что перед первым сочетанием ab может находиться до двенацати букв.

Таким образом, мы имеем требуемое ограничение на длину — 36.

Предложение: *Над трёхсимвольным алфавитом существуют сколь угодно длинные бесквадратные слова, не содержащие трёхбуквенного сочетания вида aba.*

Приведём пример бесконечного бесквадратного слова, не содержащего сочетания вида aba. Известный результат Туэ [2] — бесконечное слово, порождённое морфизмом

$$f : a \longrightarrow abcab, b \longrightarrow acabcb, c \longrightarrow acbcacb,$$

не содержит трёхбуквенного сочетания cbc. Действительно, это сочетание не может появиться ни внутри образов букв, ни на их границе.

Кроме того, ниже приведено бесквадратное слово длины 718, которое не содержит не только трёхбуквенного сочетания aba, но и парного ему — bab.

```
abcbacbcacbacabcbacbcacbabcbacbcabcbacabcacbcabcbacbcacbacab
cbacbcabcbacabcacbcabcbacbcacbabcbacbcabcbacabcacbcabcbabcac
bacabcbacbcacbacabcbabcacbcabcbacbcacbacabcbacbcabcbacabcacb
cabcbacbcacbacabcbacbcabcbabcacbcabcbacbcacbacabcbabcacbcabc
bacabcacbcabcbabcacbacabcbacbcacbacabcbabcacbcabcbacbcacbaca
bcbacbcabcbacabcacbcabcbacbcacbacabcbacbcabcbabcacbcabcbacbc
acbacabcacbcabcbacbcacbabcbacbcabcbacabcacbcabcbacbcacbacabc
bacbcabcbacabcacbcabcbacbcacbabcbacbcabcbacabcacbcabcbabcacb
acabcbacbcacbacabcbabcacbcabcbacbcacbacabcbacbcabcbacabcacbc
abcbacbcacbacabcbacbcabcbabcacbcabcbacbcacbacabcbabcacbcabcb
acabcacbcabcbabcacbacabcbacbcacbacabcbabcacbcabcbacbcacbacab
cbacbcabcbacabcacbcabcbacbcacbacabcbacbcabcbabcacbcabcbaca
```

Предложение: *Над алфавитом мощности больше трёх существуют сколь угодно длинные бесквадратные слова без определённого трёхбуквенного сочетания.*

Действительно, если мы хотим построить сколь угодно длинное бесквадратное слово без сочетания вида abc или aba, то мы можем это сделать, построив бесквадратное слово над как минимум трёхсимвольным подалфавитом без буквы a.

Замечание: *Конечность деревьев случаев, конечно же, можно проверять программно, но, по мнению автора, проверка «вручную» представляет бóльший интерес.*

11 Заключение. О применимости теории и результатов

Теория бесповторных слов нашла своё применение в различных областях математики и других науках. С помощью бесповторных последовательностей математиками Новиковым и Адяном в XX веке была отрицательно решена проблема Бернсайда о локальной конечности многообразия периодических групп.

Также, переоткрыв для себя последовательность Туэ-Морса математик, гроссмейстер, экс-чемпион мира по шахматам Макс Эйве привёл пример бесконечной шахматной партии, не сводящейся в ничью по тогдашним правилам, что потребовало их изменения.

Бесповторные последовательности применимы в теории игр, теории чисел, криптографии, символьной динамике (теория бильярдов, например) и даже в генетике. О востребованности комбинаторики на словах (а именно в это направление впоследствии вылились подобные задачи) свидетельствует хотя бы то, что последовательность Туэ-Морса была переоткрыта не один раз до публикации работ Туэ в Европе. По этой тематике написано большое количество работ и несколько монографий.

В настоящей статье получены ответы на вопросы, софрмулированные в Цели работы. Получены новые серии бесповторных последовательностей и морфизмов, их порождающих. В ряде случаев приведены оптимальные — неулучшаемые — оценки рангов бесповторных морфизмов.

12 Использованная литература

[1] Axel Thue, Uber unendliche Zeichenreihen; Norske Vid. Selsk Skr. I Mat.-Nat. Kl.; Christiania; 1906 — 1–22.

[2] Axel Thue, Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen; Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl.; Christiania; 1912 — 1–67.

[3] John Leech, A problem on strings of beads; Math. Gazette 41; 1957 — 277–278.

[4] Max Crochemore, Sharp characterizations of squarefree morphisms; Theor. Comput. Sci.; 18 (1982) — 221–226.

[5] Jean Berstel, Some recent results on squarefree words; Lecture Notes in Computer Science; 166(1984) — 14–25.

[6] G. Richomme, F. Wlazinski, Existance of finite test-sets for k-power-freeness of uniform morp- hisms — arxiv.org/pdf/cs/0512051.

[7] Christopher R. Tompkins, Overlap-free Morphisms; University of South Carolina; Mathematics; 2009 — 1–67.

[8] F. Brandenburg, Uniformly growing k-th powerfree homomorphisms; Theor. Comput. Sci.; 23(1983) — 69–82.

13 Приложение (A). Исходный код

Приведём исходный код программы, получающей все бесквадратные морфизмы ранга 11.

```
(* Objective Caml v 4.00.1 *)
let int_of_bool b = if b=true then 1 else 0;;

let squarefree_check str =
  let res = [|true|] in
  let l = String.length str in
    for i=0 to l-2 do (
      for m=1 to (l-i)/2 do (
      if (String.sub str i m = String.sub str (i+m) m)
        then (res.(0) <- false)
      ) done
    ) done;
  res.(0);;

let printl lis = List.iter (fun x -> print_string (x^" ")) lis;;
let extend str = [str^"1"; str^"2"; str^"3"];;
let step lis = List.flatten (List.map extend lis);;
let rec nextend n = if n=0 then [""] else step (nextend (n-1));;
  (* Порождаем список всех слов длины n *)

let main = Array.of_list (List.filter squarefree_check (nextend 11));;
  (* Массив всех бесквадратных слов длины 11 *)

let morphism_application str q w e =
  let apply_morphism t = match t with
    '1' -> main.(q) |
    '2' -> main.(w) |
    '3' -> main.(e) |
    q -> "" in
  let to_flatten = List.map apply_morphism str in
  String.concat "" to_flatten;;
  (* Функция - применение морфизма с образами букв, взятыми из массива, к слову *)

let ternary = [['1';'2';'1'];['1';'2';'3'];['1';'3';'1'];['1';'3';'2'];
  ['2';'1';'2'];['2';'1';'3'];['2';'3';'2'];['2';'3';'1'];
  ['3';'1';'3'];['3';'1';'2'];['3';'2';'3'];['3';'2';'1']];;
  (* Все бесквадратные слова длины 3 над трёхсимвольным алфавитом *)

let morphism_check q w e =
  let after_apply = List.filter squarefree_check
    (List.map (fun x -> morphism_application x q w e) ternary) in
  if (List.length after_apply) = 12
    then Printf.printf "%s %s %s \n" main.(q) main.(w) main.(e)
    else ();;
  (* Проверка морфизма на бесквадратность *)

let l = Array.length main;;
for q=0 to l-1 do (
  for w=0 to l-1 do (
    for e=0 to l-1 do (
      morphism_check q w e;
  ) done  ) done ) done;;
```

14 Приложение (B). Бесквадратные морфизмы ранга 11

Приведём полученный с помощью программы список всех равномерных бесквадратных морфизмов ранга 11.

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$		$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
12131232123	13212321323	13213121323		12131232123	13213121323	13212321323
12132123213	12132313213	12321231323		12132123213	12321231323	12132313213
12132313213	12132123213	12321231323		12132313213	12321231323	12132123213
12312131232	12313231232	13121323132		12312131232	13121323132	12313231232
12313231213	12321231213	23132123213		12313231213	12321312132	12321323132
12313231213	12321323132	12321312132		12313231213	23132123213	12321231213
12313231232	12312131232	13121323132		12313231232	13121323132	12312131232
12321231213	12313231213	23132123213		12321231213	23132123213	12313231213
12321231323	12132123213	12132313213		12321231323	12132313213	12132123213
12321312132	12313231213	12321323132		12321312132	12321323132	12313231213
12321312132	31213123132	31232123132		12321312132	31232123132	31213123132
12321323132	12313231213	12321312132		12321323132	12321312132	12313231213
13121323132	12312131232	12313231232		13121323132	12313231232	12312131232
13123132312	13123212312	13231321232		13123132312	13231321232	13123212312
13123212312	13123132312	13231321232		13123212312	13231321232	13123132312
13212321312	13231213123	13231232123		13212321312	13231232123	13231213123
13212321312	13231321312	32123132312		13212321312	32123132312	13231321312
13212321323	12131232123	13213121323		13212321323	13213121323	12131232123
13213121323	12131232123	13212321323		13213121323	13212321323	12131232123
13231213123	13212321312	13231232123		13231213123	13231232123	13212321312
13231213123	21312132123	21323132123		13231213123	21323132123	21312132123
13231232123	13212321312	13231213123		13231232123	13231213123	13212321312
13231321232	13123132312	13123212312		13231321232	13123212312	13123132312
13231321312	13212321312	32123132312		13231321312	32123132312	13212321312
21231213123	21231323123	21312132313		21231213123	21312132313	21231323123
21231323123	21231213123	21312132313		21231323123	21312132313	21231213123
21232131213	23121312313	23123212313		21232131213	23123212313	23121312313
21312132123	13231213123	21323132123		21312132123	21323132123	13231213123
21312132313	21231213123	21231323123		21312132313	21231323123	21231213123
21312313231	21312321231	21323132123		21312313231	21323132123	21312321231
21312321231	21312313231	21323132123		21312321231	21323132123	21312313231
21312321231	32123213231	32131213231		21312321231	32131213231	32123213231
21321232131	21323132131	23212313231		21321232131	23212313231	21323132131
21323132123	13231213123	21312132123		21323132123	21312132123	13231213123
21323132123	21312313231	21312321231		21323132123	21312321231	21312313231
21323132131	21321232131	23212313231		21323132131	23212313231	21321232131
23121312313	21232131213	23123212313		23121312313	23123212313	21232131213
23121312321	23132123213	23132131213		23121312321	23132131213	23132123213
23121312321	23132312321	31213231321		23121312321	31213231321	23132312321
23123212313	21232131213	23121312313		23123212313	23121312313	21232131213
23132123213	12313231213	12321231213		23132123213	12321231213	12313231213
23132123213	23121312321	23132131213		23132123213	23132131213	23121312321
23132131213	23121312321	23132123213		23132131213	23132123213	23121312321
23132312131	23213121321	23213231321		23132312131	23213231321	23213121321
23132312321	23121312321	31213231321		23132312321	31213231321	23121312321
23212313231	21321232131	21323132131		23212313231	21323132131	21321232131
23213121321	23132312131	23213231321		23213121321	23213231321	23132312131
23213231321	23132312131	23213121321		23213231321	23213121321	23132312131

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$		$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
31213123132	12321312132	31232123132		31213123132	31232123132	12321312132
31213123212	31321232132	31321312132		31213123212	31321312132	31321232132
31213212321	31213231321	31232123132		31213212321	31232123132	31213231321
31213231321	23121312321	23132312321		31213231321	23132312321	23121312321
31213231321	31213212321	31232123132		31213231321	31232123132	31213212321
31231323121	31232123121	32313212321		31231323121	32313212321	31232123121
31232123121	31231323121	32313212321		31232123121	32313212321	31231323121
31232123132	12321312132	31213123132		31232123132	31213123132	12321312132
31232123132	31213212321	31213231321		31232123132	31213231321	31213212321
31321232132	31213123212	31321312132		31321232132	31321312132	31213123212
31321312132	31213123212	31321232132		31321312132	31321232132	31213123212
31323121312	32131213212	32132313212		31323121312	32132313212	32131213212
32123121312	32123132312	32131213231		32123121312	32131213231	32123132312
32123132312	13212321312	13231321312		32123132312	13231321312	13212321312
32123132312	32123121312	32131213231		32123132312	32131213231	32123121312
32123213121	32312131231	32312321231		32123213121	32312321231	32312131231
32123213231	21312321231	32131213231		32123213231	32131213231	21312321231
32131213212	31323121312	32132313212		32131213212	32132313212	31323121312
32131213231	21312321231	32123213231		32131213231	32123121312	32123132312
32131213231	32123132312	32123121312		32131213231	32123213231	21312321231
32132313212	31323121312	32131213212		32132313212	32131213212	31323121312
32312131231	32123213121	32312321231		32312131231	32312321231	32123213121
32312321231	32123213121	32312131231		32312321231	32312131231	32123213121
32313212321	31231323121	31232123121		32313212321	31232123121	31231323121