Гомотопические группы конечных пространств

Новиков Глеб (Россия, Санкт-Петербург)

1. Введение

В гмотопической топологии одним из центральных понятий является понятие гомотопической группы пространства. Гомотопическая группа является важной характеристикой топологического пространства и является топологическим инвариантом. Несмотря на простоту этого понятия, вычисление конкретных гомотопических групп (даже для таких простых пространств, как сферы S^n) является трудной задачей, причём общие методы вычисления различных гомотопических групп были получены в середине XX века.

В данной работе предлагается способ вычисления гомотопических групп различных конечных клеточных комплексов. Этот метод сводит задачу вычисления гомотопических групп, а также классов отображений по модулю отношения гомотопности в целом к чисто комбинаторным задачам. Результат работы является аналогом известной теоремы Брауэра о симплициальной аппроксимации, но основную вычислительную роль здесь играют не сложные симплициальные множества, а более простые конечные топологические пространства.

2. Основные определения

Для понимания работы требуется знание ряда определений из общей и гомотопической топологии, основные из которых выделены соответственно.

Под *нормальным пространством* будем понимать топологическое пространство, в котором одноточечные множества замкнуты и любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы окрестностями (то есть содержатся в непересекающихся открытых множествах).

Первым и основным определением гомотопической топологии является понятие *гомотопии*. Гомотопия есть непрерывное отображение $F : [0,1] \times X \to Y$ топологических пространств X и Y. Обозначается $F_t : X \to Y$.

Следующие определения являются основопологающими в данной работе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Гомотопными отображениями* будем считать отображения $f, g : X \to Y$, для которых существует гомотопия F_t такая, что $F_0 = f$ и $F_1 = g$. Гомотопность отображений обозначается $f \sim g$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Гомотопическая эквивалентность* топологических пространств X и Y — пара непрерывных отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такая, что $f \circ g \sim id_Y$ и $g \circ f \sim id_X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Гомотопическая группа пространства X* $\pi_n(X, x_0)$ — группа гомотопических классов непрерывных отображений $f : S^n \to X$, переводящих отмеченную точку сферы в точку x_0, с некоторой операцией, которая задается следующим образом.

Сферу S^n можно непрерывно и биективно отобразить в I^n, где $I = [0, 1]$. Таким образом гомотопическую группу можно определеить как группу гомотопических классов непрерывных отображений $g : I^n \to X$, которые переводят границу в отмеченную точку $g(\partial I^n) = x_0$. Операцию над множеством подобных отображений можно определить так:

$$(g_1 * g_2)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} g_1(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

Далее под *индуцированным отображением* при помощи отображения $f : X \to Y$ будем понимать такое отображение гомотопических групп $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$, что каждому $g \in \pi_n(X, x_0)$ сопоставляется $h \in \pi_n(Y, y_0)$ так, что $f \circ g = h$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. *Слабая гомотопическая эквивалентность пространств X и Y* — отображение $f : X \to Y$, для которого индуцированное отображение $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ является изоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. *Конечная модель пространства N* — конечное пространство N_f вместе со слабой гомотопической эквивалентностью из N в N_f.

Назовём конаправленную систему конечных моделей клеточного комплекса *хорошо аппроксимирующей*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая модель, что все клетки имеют диаметр меньше ε. Пусть отображение $\phi : [0, 1]^n \to S^n$ задаёт сферические координаты на сфере S^n. Тогда на сфере можно индуцировать клеточную структуру образами кубов вида $\prod_{j=0}^{k} \left[\frac{i_j}{k}, \frac{i_j+1}{k}\right]$ для всех i_j. Конечные модели n-сферы будем обозначать через $S^n_{k,f}$, а отображение из S^n в $S^n_{k,f}$ через p_k.

3. Основные результаты

Основным результатом работы стала теорема 3.2, которая помогает в явном виде посчитать гомотопические группы, как частный случай теоремы, несложным способом. Теорема же подразумевает не только отображения из сферы S^n в конечный клеточный комплекс M, о чем говорится в определении гомотопической группы пространства M, но и отображения из любого конечного клеточного комплекса N, тем самым позволяя посчитать любое множество отображений их N в M по модулю гомотопии.

ТЕОРЕМА 3.1. Каждое отображение $r : S^n \to M_f$ может быть пропущено через $S^n_{k,f}$, то есть существует отображение $\overline{r} : S^n_{k,f} \to M_f$ такое, что $r \sim \overline{r} \circ p_k$.

ТЕОРЕМА 3.2. $[N, M]_{pt} \cong \varinjlim [N_{k,f}, M_f]_{pt}$, где $N_{k,f}$ есть хорошо аппроксимирующие конечные модели CW-комплекса N. То есть множество отображений из N в конечный клеточный комплекс M по модулю гомотопий изоморфно индуктивному пределу последовательности множеств $[N_{k,f}, M_f]_{pt}$.

4. Вспомогательные утверждения

Следующие утверждения были выведены и доказаны в процессе исследования. На их основании доказаны теоремы 3.1 и 3.2.

ЛЕММА 4.1. Пусть X, K — топологические пространства с отмеченной точкой. Предположим, что K конечно и в нём выполняется T_0. Пусть отображения $f, g : X \to K$ непрерывны и для любых $x \in X$ выполнено $f(x) \in \overline{g(x)}$. Тогда они гомотопны.

ЛЕММА 4.2. В теореме 3.1 можно заменить сферу S^n на другой конечный CW-комплекс N, а $S^n_{k,f}$ на хорошо аппроксимирующие конечные модели N_f этого комплекса.

5. Используемые результаты

ЛЕММА 5.1. см. [McCord]: Для каждого конечного клеточного комплекса M существует конечное топологическое пространство M_f и отображение $g : M \to M_f$, являющееся слабой гомотопической эквивалентностью.

6. Доказательства основных результатов

`ТЕОРЕМА 3.1.` Каждое отображение $r : S^n \to M_f$ может быть пропущено через $S^n_{k,f}$, то есть существует отображение $\overline{r} : S^n_{k,f} \to M_f$ такое, что $r \sim \overline{r} \circ p_k$.

Доказательство. Рассмотрим слабую гомотопическую эквивалентность $p : M \to M_f$. Тогда отображение $r : S^n \to M_f$ можно представить в виде композиции $r = p \circ g$, где $g : S^n \to M$. Для каждой клетки $c \subseteq M$ фиксируем стягиваемую окрестность U_c внутренности c так, что подобные окрестности двух любых клеток c и c' одинакого диаметра не пересекаются, а также $p(U_c)$ является минимальной окрестностью, содержащей $p(Int(c))$. Мы можем так сделать, так как CW-комплекс есть нормальное пространство. Отметим, что $\{U_c\}$ является покрытием M.

По лемме Лебега существует такое разбиение, что каждый элемент разбиения отображается в свой элемент покрытия. Для любой клетки e из S^n существует минимальное число $N(e)$ такое, что для него существует клетка $c(e) \subseteq M$ диаметра $N(e)$ такая, что её стягиваемая окрестность $U_{c(e)}$ содержит $g(e)$. Отметим, что такие $c(e)$ единственны.

Для любой клетки $c \subseteq M$ определим K_c как объединение клеток сферы, образы которых лежат в U_c. Когда диаметр c есть нуль, то K_c замкнуто.

Построим отображение $\overline{r}$ так, что оно отправляет каждую точку K_c в $p(Int(c))$. Оно непрерывно, так как $\overline{r}^{-1}(\overline{p(Int(c))}) = \bigcup\limits_{e \subseteq \overline{c}} K_e$ замкнуто для любого c по определению K_e. Также $\overline{r}(x) \in \overline{r(x)}$ для любого $x \in S^n$. Тогда r и $\overline{r}$ гомотопны по лемме 4.1. Кроме того, r отображает внутренность каждой клетки в точку M_f, а значит оно пропущенно через $S^n_{k,f}$.

`ТЕОРЕМА 3.2.` $[N, M]_{pt} \cong \varinjlim [N_{k,f}, M_f]_{pt}$, где $N_{k,f}$ есть хорошо аппроксимирующие конечные модели CW-комплекса N.

Доказательство. Действительно, имеем отображение $[N_{k,f}, M_f]_{pt} \to [N, M_f]_{pt} \cong [N, M]_{pt}$ для любого k. Тогда мы получим отображение $\phi : \varinjlim [N_{k,f}, M_f]_{pt} \to [N, M]_{pt}$. По теореме 3.1 ϕ будет сюръективым, а инъективность следует из леммы 4.2.

7. Доказательства вспомогательных результатов

ЛЕММА 4.1. Пусть X, K — топологические пространства с отмеченной точкой. Предположим, что K конечно и в нём выполняется T_0. Пусть отображения $f, g : X \to K$ непрерывны и для любых $x \in X$ выполнено $f(x) \in \overline{g(x)}$. Тогда они гомотопны.

Доказательство. Построим гомотопию $H : X \times I \to K$ со следующими свойствами:

$$H(x, 0) = f(x)$$

$$H(x, t) = g(x),\ t \in (0, 1]$$

Чтобы показать непрерывность отображения H, нужно показать, что $H^{-1}(\overline{p})$ замкнут для любой точки $p \in f(X) \cup g(X)$. Отметим, что если $g(x) \in \overline{p}$, то и $f(x) \in \overline{p}$. Это даёт $g^{-1}(\overline{p}) \times [0, 1] \subseteq f^{-1}(\overline{p}) \times \{0\} \cup g^{-1}(\overline{p}) \times (0, 1]$. Тогда $H^{-1}(\overline{p}) = f^{-1}(\overline{p}) \times \{0\} \cup g^{-1}(\overline{p}) \times (0, 1] = f^{-1}(\overline{p}) \times \{0\} \cup g^{-1}(\overline{p}) \times [0, 1]$. А тогда он замкнут как объединение замкнутых множеств.

8. Список литературы

[McCord] M.C. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. Duke Mathematical Journal 33 (1966)

[Fomenko] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. Москва «НАУКА». Главная редакция физико-математической литературы 1989

Автор выражает благодарность научному руководителю Соснило Владимиру Александровичу, студенту четвертого курса СПбГУ МАТ-МЕХ и сотруднику исследовательской лаборатории им. П.Л. Чебышева, за проявленный интерес к работе и помощь в исследовании.