Линейная алгебра матриц Адамара

Алексеев И. С. и Голыгин И. А.
Санкт-Петербург, Россия

Введение

Матрица Адамара H – это квадратная матрица $n \times n$, составленная из чисел ± 1, столбцы которой ортогональны так, что справедливо соотношение $H \cdot H^{\mathrm{T}} = n \cdot E_n$. С одной стороны теорию матриц Адамара можно отнести к прикладной математике (Коды Рида-Маллера, функции Уолша). В частности, они использовались 1971 году при полёте на Марс в программе "Маринер Марс 71", и используются в некоторых мобильных телефонах (таких стандартах сотовой связи, как IS-95, CDMA2000 или UMTS). Так же они используются в рентгеновских телескопах с пространственным кодированием апертуры. С другой стороны, чисто математический вопрос о том, при каких n существует матрица Адамара размера n×n, остаётся открытым. В нашей работе некоторые классы матриц Адамара изучаются с точки зрения линейной алгебры. Если матрицу Адамара размера $n \times n$ умножить на $\sqrt{n}/n$, то получится ортогональная матрица. Назовём такую матрицу приведенной матрицей Адамара. Для ортогональных операторов есть нормальная форма. Она позволяет записать ортогональный оператор в виде прямой суммы операторов поворота и операторов симметрии. Мы задались вопросом о том, каким образом матрицы Адамара представляются в таком виде.

Самый известный тип матриц Адамара — это матрицы Сильвестра. Мы доказываем, что матрицы Сильвестра задают оператор симметрии относительного некоторого явно заданного подпространства. Напомним, что первой матрицей Сильвестра называется матрица:

$$\mathsf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если H — какая-то матрица Адамара, то блочная матрица

$$\mathsf{S}_1 \tilde{\otimes} H := \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$$

тоже является матрицей Адамара. n-ая матрица Сильвестра — это матрица Адамара размера $2^n \times 2^n$, которая определяется по рекурсии следующим образом

$$\mathsf{S}_{n+1} = \mathsf{S}_1 \tilde{\otimes} \mathsf{S}_n.$$

Введём некоторые обозначения для формулировки основного результата. Если A — конечное множество, то через $\#A$ мы обозначаем количество элементов в A. Пусть $1 \le k \le 2^n$. Тогда мы можем единственным образом представить число $k-1$ в двоичной системе счисления, используя n знаков:

$$k - 1 = \sum_{i=0}^{n-1} k(i) 2^i,$$

где $k(i) \in \{0, 1\}$. Обозначим

$$N_0(k) = \{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid k(i) = 0\}$$

$$N_1(k) = \{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid k(i) = 1\}$$

Пусть $A \subseteq \{0, \dots, n-1\}$. Обозначим

$$n_0(k, A) = \#(N_0(k) \vartriangle A) = \#((N_0(k) \cup A) \smallsetminus (N_0(k) \cap A))$$

$$n_1(k, A) = \#(N_1(k) \vartriangle A) = \#((N_1(k) \cup A) \smallsetminus (N_1(k) \cap A))$$

Тогда обозначим через $u(A) \in \mathbb{R}^{2^n}$ — вектор

$$u(A) = (u(A)_1, \dots, u(A)_{2^n}),$$

k-ая координата которого выражается следующим образом:

$$u(A)_k = (-1)^{\sum\limits_{i \in A} k(i)} \cdot \frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{n_0(k,A)} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{n_1(k,A)}}{2^{2^n}}.$$

В работе мы доказываем, что множество векторов $\{u(A) \mid A \subseteq \{1, \dots, n\}\}$ образует ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{2^n}$ (Следствие 2.13). Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 3.2. *Оператор на $\mathbb{R}^{2^n}$, соответствующий n-ой матрице Сильвестра, — это композиция гомотетии с коэффициентом $2^{-\frac{n}{2}}$ и симметрии относительно подпространства, порожденного векторами $u(A)$ с чётным $\#A$.*

1 Основные определения и обозначения

Под векторным пространством мы всегда подразумеваем конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Векторные пространства мы обозначаем буквами $V, U \dots$. Напомним стандартные определения из линейной алгебры и теории множеств, которые могут быть найдены в [1].

- **Скалярным произведением** на V называется симметрическая билинейная форма $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим свойству $\langle v, v \rangle > 0$ для $v \in V \smallsetminus \{0\}$.

- **Евклидовым пространством** мы называем пару $(V, \langle -, - \rangle)$, где $\langle -, - \rangle$ — скалярное произведение на конечномерном вещественном пространстве V.

- **Стандартным скалярным произведением** на $\mathbf{R^n}$ называется скалярное произведение, заданное формулой $\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}, (\beta_1, \dots, \beta_n)^{\mathrm{T}} \rangle = \sum \alpha_i \beta_i$. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ мы всегда считаем евклидовым пространством вместе со стандартным скалярным произведением.

- **Ортогональным дополнением** к подпространству U евклидова пространства V мы называем подпространство

  $$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0\}.$$

  Пространство V распадается в прямую сумму $V = U \oplus U^{\perp}$, и следовательно, любой вектор $v \in V$ представляется единственным образом как $v = u + u'$, где $u \in U$ и $u' \in U^{\perp}$.

- **Тензорным произведением векторных пространств** U и V мы называем векторное пространство $U \otimes V$ вместе с универсальным билинейным отображением $\tau : U \times V \to U \otimes V$. Под универсальностью билинейного отображения τ мы имеем ввиду, что для любого другого билинейного отображения $\tau' : U \times V \to W$ существует единственное линейное отображение $f : U \otimes V \to W$, удовлетворяющее условию $\tau' = f\tau$. Для векторов $u \in U$ и $v \in V$, мы обозначаем $u \otimes v \coloneqq \tau(u, v)$.

- **Тензорным произведением линейных отображений** $a : U_1 \to U_2$ и $b : V_1 \to V_2$ называется единственное линейное отображение $a \otimes b : U_1 \otimes V_1 \to U_2 \otimes V_2$ такое, что $(a \otimes b)(u \otimes v) = a(u) \otimes b(v)$ для любых $u \in U$ и $v \in V$.

- Если A — конечное множество, то через $\#A$ обозначается количество элементов в A.

2 Линейная алгебра

2.1 Тензорное и кронекерово произведение

В этом пункте мы напомним стандартные факты о связи тензорного и кронекерова произведения.

Пусть U — векторное пространство с базисом $\{u_i\}_{i=1}^n$ и V — векторное пространство с базисом $\{v_j\}_{j=1}^m$. Тогда их тензорное произведение $V \otimes U$ имеет базис $\{u_i \otimes v_j\}$, и в частности $\mathsf{dim}(U \otimes V) = \mathsf{dim}(U) \cdot \mathsf{dim}(V)$. В частности, $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{nm}$ и этот изоморфизм можно определить на стандартном базисе следующим образом

$$\Phi : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{nm}, \qquad \Phi(e_i \otimes e_j) = e_{(j-1)n+i}.$$

Для произвольных векторов $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ и $v = (\beta_1, \dots, \beta_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ **кронекеровым произведением векторов** называется следующий вектор из $\mathbb{R}^{nm}$

$$u \tilde{\otimes} v \coloneqq (\alpha_1 v, \alpha_2 v, \dots, \alpha_n v)^{\mathrm{T}} = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \dots, \alpha_1\beta_m, \alpha_2\beta_1, \dots, \alpha_2\beta_m, \dots \dots \alpha_n\beta_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{nm}.$$

Тогда на произвольном разложимом тензоре изоморфизм Φ задаётся так:

$$\Phi\big((\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathrm{T}} \otimes (\beta_1, \dots, \beta_m)^{\mathrm{T}}\big) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathrm{T}} \tilde{\otimes} (\beta_1, \dots, \beta_m)^{\mathrm{T}}.$$

Если $U \le \mathbb{R}^n$ и $V \le \mathbb{R}^m$, то **кронекеровыми произведением подпространств** $U \tilde{\otimes} V$ мы назовём подпространство $\mathbb{R}^{nm}$, порождённое кронекеровыми произведениями векторов $\{u \tilde{\otimes} v \mid u \in U, v \in V\}$. Иными словами

$$U \tilde{\otimes} V = \Phi(U \otimes V).$$

Отсюда вытекает, что если $u_1, \dots, u_k$ — базис U и $v_1, \dots, v_l$ — базис V, то $\{u_i \tilde{\otimes} v_j\}$ — базис $U \tilde{\otimes} V$.

Пусть теперь A — матрица размера $m \times n$ и B — матрица размера $l \times k$. Тогда **кронекеровым произведением матриц** A и B называется следующая блочная матрица размера $ml \times nk$

$$A \tilde{\otimes} B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Кронекерово произведение матриц является обобщением кронекерова произведения векторов.

Пусть $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $b : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ — линейные отображения и A, B — соответствующие матрицы размеров $m \times n$ и $l \times k$ соответственно. Пусть $a \otimes b : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^l$ — тензорное произведение этих линейных отображений. Положим

$$a \mathbin{\tilde{\otimes}} b = \Phi \circ (a \otimes b) \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^{nk} \longrightarrow \mathbb{R}^{ml}.$$

Тогда следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k \arrow[r, "a \otimes b"] \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] & \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^l \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] \\
\mathbb{R}^{nk} \arrow[r, "a \mathbin{\tilde{\otimes}} b"] & \mathbb{R}^{ml}
\end{tikzcd}$$

Матрица, соответствующая линейному отображению $a \mathbin{\tilde{\otimes}} b$, — это кронекерово произведение матриц $A \mathbin{\tilde{\otimes}} B$.

2.2 Кронекеровы произведения и ортогональные дополнения

Предложение 2.1. *Пусть U и V — евклидовы пространства. Тогда на тензорном произведении $U \otimes V$ существует единственное скалярное произведение такое, что*

$$\langle u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle.$$

В дальнейшем вы всегда будем считать $U \otimes V$ евклидовым пространством вместе с этим скалярным произведением.

Доказательство Предложения 2.1. По определению тензорного произведения существует единственное линейное отображение $p_U : U \otimes U \to \mathbb{R}$ такое, что $p_U(u_1 \otimes u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$. Аналогично определяем $p_V : V \otimes V \to \mathbb{R}$. Отображение $b : (U \otimes U) \times (V \otimes V) \to \mathbb{R}$, заданное по формуле $b(u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2) = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle$ является билинейным, и следовательно, сущестует единственное линейное отображение $P : U \otimes U \otimes V \otimes V \to \mathbb{R}$ такое, что $P(u_1 \otimes u_2 \otimes v_1 \otimes v_2) = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle$. Воспользуемся изоморфизмом $U \otimes V \cong V \otimes U$, и определим $p_{U \otimes V} : (U \otimes V) \otimes (U \otimes V) \to \mathbb{R}$ как композицию P и этого изоморфизма. Тогда $p_{U \otimes V}$ — это единственное линейное отображение такое, что $p_{U \otimes V}((u_1 \otimes v_1) \otimes (u_2 \otimes v_2)) = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle$. Скомпоновав его с $\tau : (U \otimes V) \times (U \otimes V) \to (U \otimes V) \otimes (U \otimes V)$, получаем единственное билинейное отображение $b' : (U \otimes V) \times (U \otimes V) \to \mathbb{R}$ такое, что $b'(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2) = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle$. Легко видеть, что b' — симметрическая билинейная форма. Докажем, что b' — скалярное произведение. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — ортонормированный базис U и $v_1, \ldots, v_m$ — ортонормированный базис V. Тогда $\{u_i \otimes v_j\}$ — базис $U \otimes V$. Следовательно, любой элемент $w \in U \otimes V$ представляется в виде $w = \sum \alpha_{ij} u_i \otimes v_j$. Тогда, используя билинейность b' и ортонормированность базисов, получаем $b'(w, w) = \sum \alpha_{ij}^2$. Отсюда вытекает, если $w \neq 0$, то $b'(w, w) > 0$. $\square$

Лемма 2.2. *Если $u_1, \ldots, u_n$ — ортонормированный базис U и $v_1, \ldots, v_m$ — ортонормированный базис V, то $\{u_i \otimes v_j\}$ — ортонормированный базис $U \otimes V$.*

Доказательство. Это следует из формулы $\langle u_i \otimes v_j, u_k \otimes v_l\rangle = \langle u_i, u_k\rangle \cdot \langle v_j, v_l\rangle = \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \delta_{(i,k),(k,l)}$. ☐

Лемма 2.3. *Изоморфизм $\Phi : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{nm}$ является изоморфизмом евклидовых пространств. То есть $\langle u, v\rangle = \langle\Phi(u), \Phi(v)\rangle$ для любых $u, v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Это следует из того, что Φ переводит ортонормированный базис $\{e_i \otimes e_j\}$ в ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_{nm}\}$. ☐

Следствие 2.4. *Если $u_1, \dots, u_k$ — ортонормированный базис подпространства $U \leq \mathbb{R}^n$ и $v_1, \dots, v_l$ — ортонормированный базис подпространства $V \leq \mathbb{R}^m$, то $\{u_i \tilde{\otimes} v_j\}$ — ортонормированный базис подпространства $U \tilde{\otimes} V \leq \mathbb{R}^{nm}$.*

Следствие 2.5. *Если $u_1, \dots, u_n$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$ и $v_1, \dots, v_m$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^m$, то $\{u_i \tilde{\otimes} v_j\}$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{nm}$.*

Лемма 2.6. *Пусть $U_1 \leq V_1$ и $U_2 \leq V_2$ — подпространства в евклидовых пространствах. Тогда подпространства $U_1 \otimes U_2$, $U_1^\perp \otimes U_2$, $U_1 \otimes U_2^\perp$, $U_1^\perp \otimes U_2^\perp$ попарно ортогональны и*

$$\big((U_1 \otimes U_2) \oplus (U_1^\perp \otimes U_2^\perp)\big)^\perp = (U_1^\perp \otimes U_2) \oplus (U_1 \otimes U_2^\perp).$$

Доказательство. Докажем, что $U_1 \otimes U_2$ ортогонально $U_1^\perp \otimes U_2$. Действительно, пространство $U_1 \otimes U_2$ порождается элементами $u_1 \otimes u_2$, где $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$, а пространство $U_1^\perp \otimes U_2$ порождается элементами $u_1' \otimes \tilde{u}_2$, где $u_1' \in U_1^\perp$ и $\tilde{u}_2 \in U_2$. Тогда $\langle u_1 \otimes u_2, u_1' \otimes \tilde{u}_2\rangle = \langle u_1, u_1'\rangle\langle u_2, \tilde{u}_2\rangle = 0$, и следовательно, подпространство $U_1 \otimes U_2$ ортогонально $U_1^\perp \otimes U_2$. Аналогично это доказывается для остальных пар. Из этого следует, что $\big((U_1 \otimes U_2) \oplus (U_1^\perp \otimes U_2^\perp)\big)^\perp \supseteq (U_1^\perp \otimes U_2) \oplus (U_1 \otimes U_2^\perp)$. Пусть $\mathsf{dim}(U_i) = m_i$ и $\mathsf{dim}(V_i) = n_i$. Вычислим размерности $\mathsf{dim}(\big((U_1 \otimes U_2) \oplus (U_1^\perp \otimes U_2^\perp)\big)^\perp) = n_1n_2 - \mathsf{dim}((U_1 \otimes U_2) \oplus (U_1^\perp \otimes U_2^\perp))$ $= n_1n_2 - \mathsf{dim}(U_1 \otimes U_2) - \mathsf{dim}(U_1^\perp \otimes U_2^\perp) = n_1n_2 - m_1m_2 - (n_1 - m_1)(n_1 - m_2) = n_1m_2 + n_2m_1 - 2m_1m_2$ и $\mathsf{dim}((U_1^\perp \otimes U_2) \oplus (U_1 \otimes U_2^\perp)) = \mathsf{dim}(U_1^\perp \otimes U_2) + \mathsf{dim}(U_1 \otimes U_2^\perp) = (n_1 - m_1)m_2 + m_1(n_2 - m_2) = n_1m_2 + n_2m_1 - 2m_1m_2$. Размерности этих пространств совпадают и одно из них включается в другое, поэтому они равны. ☐

Следствие 2.7. *Пусть $U_1 \leq \mathbb{R}^n$ и $U_2 \leq \mathbb{R}^m$ — подпространства. Тогда подпространства $U_1 \tilde{\otimes} U_2$, $U_1^\perp \tilde{\otimes} U_2$, $U_1 \tilde{\otimes} U_2^\perp$, $U_1^\perp \tilde{\otimes} U_2^\perp$ попарно ортогональны и*

$$\big((U_1 \tilde{\otimes} U_2) \oplus (U_1^\perp \tilde{\otimes} U_2^\perp)\big)^\perp = (U_1^\perp \tilde{\otimes} U_2) \oplus (U_1 \tilde{\otimes} U_2^\perp).$$

2.3 Симметрии в екввклидовых пространствах

Пусть V — евклидово пространство и $U \leq V$ его подпространство. Тогда **симметрией** пространства V относительно U называется оператор S_U такой, что

$$s_U : V \longrightarrow V, \qquad s_U(u + u') = u - u',$$

где $u \in U$ и $u' \in U^\perp$.

Лемма 2.8. *Пусть U — подпространство евклидова пространства V, $u_1, \dots, u_m$ — ортонормированный базис U и $u_1', \dots, u_k'$ — ортонормированный базис $U^\perp$. Тогда для оператора $a : V \to V$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. $a = s_U$;

2. $a(u_i) = u_i$ *и* $a(u'_j) = -u'_j$ *для любых* $1 \le i \le m$ *и* $1 \le j \le k$.

Доказательство. (1) ⇒ (2) — очевидно.

(2) ⇒ (1). Если $u \in U$, то $u = \sum \alpha_i u_i$. Тогда $a(u) = \sum_{i=1}^k \alpha_i a(u_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = u$. Если $u' \in U^\perp$, то $u' = \sum \beta_j u'_j$ и $a(u') = \sum \beta_j a(u'_j) = -\sum \beta_j v_j = -u'$. Следовательно, $a(u+u') = u - u' = s_U(u+u')$, откуда получаем $a = s_U$. □

Лемма 2.9. *Пусть* $U_1 \le V_1$ *и* $U_2 \le V_2$ *— подпространства в евклидовых пространствах. Тогда*

$$s_{U_1} \otimes s_{U_2} = s_{(U_1 \otimes U_2) \oplus (U_1^\perp \otimes U_2^\perp)}.$$

Доказательство. Ввиду Леммы 2.6, достаточно доказать, что $s_{U_1} \otimes s_{U_2}$ действует тождественно на подпространствах $U_1 \otimes U_2$ и $U_1^\perp \otimes U_2^\perp$, и сменой знака на подпространствах $U_1^\perp \otimes U_2$ и $U_1 \otimes U_2^\perp$. Но это очевидно следует из определения. □

Следствие 2.10. *Пусть* $U \le \mathbb{R}^n$ *и* $V \le \mathbb{R}^m$. *Тогда*

$$s_{U_1} \tilde{\otimes} s_{U_2} = s_{(U_1 \tilde{\otimes} U_2) \oplus (U_1^\perp \tilde{\otimes} U_2^\perp)}.$$

2.4 Кронекеровы степени симметрий в $\mathbb{R}^2$

Пусть $u = (\alpha_0, \alpha_1)$ нормированный вектор в $\mathbb{R}^2$ т.е. $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1$, и $u' = (\alpha_1, -\alpha_0)$ Рассмотрим прямую $U_1 = \mathsf{span}(u)$. Тогда $U_1^\perp = \mathsf{span}(u')$. По рекурсии определим $U_n \le \mathbb{R}^{2^n}$ следующим образом

$$U_{n+1} = (U_1 \tilde{\otimes} U_n) \oplus (U_1^\perp \tilde{\otimes} U_n^\perp).$$

Тогда по Следствию 2.7 получаем

$$U_{n+1}^\perp = (U_1^\perp \tilde{\otimes} U_n) \oplus (U_1 \tilde{\otimes} U_n^\perp).$$

Рассмотрим следующие множества векторов

$$\mathcal{B}_n = \{u_1 \tilde{\otimes} u_2 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} u_n \mid u_i \in \{u, u'\} \text{ и } \#\{i \mid u_i = u'\} \text{ — чётно}\},$$

$$\mathcal{B}'_n = \{u_1 \tilde{\otimes} u_2 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} u_n \mid u_i \in \{u, u'\} \text{ и } \#\{i \mid u_i = u'\} \text{ — нечётно}\}.$$

Лемма 2.11. *В приведённых выше обозначениях* $\mathcal{B}_n$ *является ортонормированым базисом* U_n *и* $\mathcal{B}'_n$ *является ортонормированым базисом* $U_n^\perp$.

Доказательство. Проведём индукцию по n. При $n = 1$ это утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для n и докажем его для $n+1$. Так как u — ортонормированный базис подпространства U_1 и $\mathcal{B}_n$ — ортонормированный базис подпространства U_n, по Следствию 2.4 получаем, что $u \tilde{\otimes} \mathcal{B}_n$ — ортонормированный базис подпространства $U_1 \tilde{\otimes} U_n$. Аналогично получаем, что $u \tilde{\otimes} \mathcal{B}'_n$ — ортонормированный базис $U_1 \tilde{\otimes} U_n^\perp$, $u' \tilde{\otimes} \mathcal{B}_n$ — ортонормированный базис $U_1^\perp \tilde{\otimes} U_n$, $u' \tilde{\otimes} \mathcal{B}'_n$ — ортонормированный базис $U_1^\perp \tilde{\otimes} U_n^\perp$. Используя Следствие 2.4, получаем, что $\mathcal{B}_{n+1} = (u \tilde{\otimes} \mathcal{B}_n) \cup (u' \tilde{\otimes} \mathcal{B}'_n)$ — ортонормированный базис U_{n+1} и $\mathcal{B}'_{n+1} = (u' \tilde{\otimes} \mathcal{B}_n) \cup (u \tilde{\otimes} \mathcal{B}'_n)$ — ортонормированный базис $U_{n+1}^\perp$. □

Пусть $1 \le k \le 2^n$. Тогда мы можем единственным образом представить число $k-1$ в двоичной системе счисления:

$$k-1 = \sum_{i=0}^{n-1} k(i) 2^i,$$

где $k(i) \in \{0,1\}$. Обозначим

$$N_0(k) = \{i \in \{0,\ldots,n-1\} \mid k(i) = 0\}$$

$$N_1(k) = \{i \in \{0,\ldots,n-1\} \mid k(i) = 1\}$$

Пусть $A \subseteq \{0,\ldots,n-1\}$. Обозначим

$$n_0(k,A) = \#(N_0(k) \vartriangle A) = \#((N_0(k) \cup A) \setminus (N_0(k) \cap A))$$

$$n_1(k,A) = \#(N_1(k) \vartriangle A) = \#((N_1(k) \cup A) \setminus (N_1(k) \cap A))$$

Тогда обозначим через $u(A) \in \mathbb{R}^{2^n}$ — вектор

$$u(A) = (u(A)_1, \ldots, u(A)_{2^n}),$$

k-ая координата которого выражается следующим образом:

$$u(A)_k = (-1)^{\sum\limits_{i \in A} k(i)} \alpha_0^{n_0(k,A)} \alpha_1^{n_1(k,A)}.$$

Лемма 2.12. *В приведённых выше обозначениях*

$$\mathcal{B}_n = \{u(A) \mid \#A \text{ — чётно}\},$$

$$\mathcal{B}'_n = \{u(A) \mid \#A \text{ — нечётно}\}.$$

Доказательство. Это утверждение доказывается по индукции при помощи равенств $\mathcal{B}_{n+1} = (u \tilde{\otimes} \mathcal{B}_n) \cup (u' \tilde{\otimes} \mathcal{B}'_n)$, $\mathcal{B}'_{n+1} = (u' \tilde{\otimes} \mathcal{B}_n) \cup (u \tilde{\otimes} \mathcal{B}'_n)$, равенства $u \tilde{\otimes} u(A) = u(A+1)$, где $A+1 = \{a+1 \mid a \in A\}$ и равенства $u' \tilde{\otimes} u(A) = u((A+1) \cup \{0\})$. $\square$

Следствие 2.13. *Множество векторов $\{u(A) \mid A \subseteq \{0,\ldots,n-1\}\}$ образует ортонормированный базис $\mathbb{R}^{2^n}$.*

Введём обозначение: $s_U^{\tilde{\otimes} n} = \underbrace{s_U \tilde{\otimes} s_U \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} s_U}_{n \text{ раз}}$.

Лемма 2.14. *В приведённых выше обозначениях $s_U^{\tilde{\otimes} n} = s_{U_n}$.*

Доказательство. Это следует по индукции из Следствия 2.10. $\square$

3 Матрицы Сильвестра

Обозначим через S_1 первую матрицу Сильвестра:

$$\mathsf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда n-ая матрица Сильвества определяется следующим образом

$$\mathsf{S}_n = \mathsf{S}_1^{\tilde{\otimes} n} = \underbrace{\mathsf{S}_1 \tilde{\otimes} \mathsf{S}_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathsf{S}_1}_{n \text{ раз}}.$$

S^n — матрица Адамара размера $2^k \times 2^k$. Приведённой k-ой матрицей Сильвестра назовём матрицу

$$\bar{\mathsf{S}}_n = 2^{-\frac{n}{2}} \mathsf{S}_n.$$

Легко видеть, что

$$\bar{\mathsf{S}}_{n+1} = \bar{\mathsf{S}}_1^{\tilde{\otimes} n}.$$

Лемма 3.1. *Линейное отображение, соответствующее матрице $\bar{\mathsf{S}}_1$, — это симметрия $\mathbb{R}^2$ относительно прямой, порождённой вектором*

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right)^{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Легко видеть, что $\bar{S}_1$ — это ортогональная матрица 2×2 с определителем равным -1. Следовательно, соответствующий оператор – это симметрия $\mathbb{R}^2$ относительно некоторой прямой. Так как вектор $\bar{S}_1(1,0)^{\mathrm{T}} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))$ находится под углом $\pi/4$ по отношению к вектору $(1,0)^{\mathrm{T}}$, получаем, что эта прямая лежит по углом $\pi/8$ к оси абсцисс. Следовательно, она порождается вектором $u = (\cos(\pi/8), \sin(\pi/8))$. Пользуясь формулой косинуса и синуса половинного угла, получаем $u = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right)^{\mathrm{T}}$. □

Пусть $\alpha_0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Тогда, специфицируя обозначения, введённые в 2.4, получаем, что для любого подмножества $A \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ определён вектор $u(A) \in \mathbb{R}^{2^n}$, k-ая координата которого выражается следующим образом:

$$u(A)_k = (-1)^{\sum\limits_{i \in A} k(i)} \cdot \frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{n_0(k,A)} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{n_1(k,A)}}{2^{2^n}}.$$

Теорема 3.2. *Оператор на $\mathbb{R}^{2^n}$, соответствующий n-ой матрице Сильвестра, — это композиция гомотетии с коэффициентом $2^{-\frac{n}{2}}$ и симметрии относительно подпространства, порожденного векторами $u(A)$ с чётным $\#A$.*

Доказательство. Напрямую следует из Лемм 2.11, 2.12, 3.1, 2.14. □

Список литературы

[1] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 5 изд., М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.

[2] J. Horadam, Hadamard matrices and their applications (Princeton University Press 2007).

Выражаем особую благодарность кандидату физико-математических наук Сергею Олеговичу Иванову за формулировку задачи и активное обсуждение.

Лаборатория Непрерывного Математического Образования, 2015