III САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Задача 1. Определители

Напомним, что на множестве квадратных матриц размера n есть функция Δ, сопоставляющая матрице некоторое число, которое называется определителем этой матрицы. Эта функция однозначно задаётся следующими условиями: если матрица A представлена в виде $(u_1, \ldots, u_n)$, где u_i столбцы чисел, то тогда

1. Если случилось так, что столбец $u_i = v + \lambda v'$, где v и v' столбцы, а λ — некоторое число, то
$$\Delta(A) = \Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n) + \lambda\Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, v', u_{i+1}, \ldots, u_n).$$
2. Для любых $1 \le i < j \le n$ выполнено
$$\Delta(A) = -\Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n).$$
3. $\Delta(E) = 1$, где E матрица, такая что $E_{ij} = 0$, для $i \neq j$ и $E_{ii} = 1$.

Так, например, определитель для матрицы $A = \left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{smallmatrix}\right)$ размера 2 может быть вычислен по формуле
$$\Delta(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$
Матрица A называется симметричной, если $A_{ij} = A_{ji}$ для всех возможных i и j.

Главным минором порядка k, или просто k-ым главным минором матрицы A, называется число, равное определителю матрицы C размера k, где $C_{i,j} = A_{i,j}$ $(1 \le i, j \le k)$. Будем обозначаеть это число $\Delta_k(A)$. Последовательностью главных миноров матрицы A называется строка $(\Delta_1(A), \ldots, \Delta_n(A))$.

1. Покажите, что если A симметричная матрица размера 2, составленная из вещественных чисел и её первый главный минор равен 0, то её определитель отрицателен.
2. Докажите, что для комплексных симметричных матриц 2×2 в качестве последовательности главных миноров реализуется любая строка комплексных чисел.
3. Исследуйте эти же вопросы для матриц 3×3.
4. Для любого натурального n найдите все упорядоченные наборы $(B_1, \ldots, B_n) \in F^n$, для каждого из которых найдется симметричная матрица A размера n с элементами из F, у которой последовательность главных миноров совпадает с $(B_1, \ldots, B_n)$, а F – одно из следующих множеств

   а) $\mathbb{R}$,

   б) $\mathbb{C}$,

   в) $\mathbb{Q}$,

   г) любое другое поле.

5. Исследуйте вопрос пункта 4 для целочисленных матриц, матриц с коэффициентами в целых гауссовых числах и т.д.

6. Предложите свои обобщения этой задачи и решите их.

Задача 2. Короткие дороги

В некоторой стране идёт активное строительство дорог. Основная задача состоит в том, чтобы соединить между собой все города наименьшей по общей длине системой дорог. В данном случае будем считать, что города - это точки на плоскости, а система дорог - это набор отрезков, не пересекающихся между собой нигде, за исключением, возможно, своих концов. Назовём точку — точкой разветвления дорог, если в этой точке встречаются три или более дороги. Стоит отметить, что концом отрезка не обязательно является город.

1. Определите, как выглядит оптимальная система дорог, если в стране всего три города, находящихся на равном расстоянии; на разных расстояниях друг от друга. Найдите длину этой сети дорог.

2. Покажите, что для любой конфигурации городов оптимальная сеть дорог образует дерево с вершинами в городах и точках разветвления дорог.

3. Выясните, какие возможны конфигурации дорог в точках разветвления.

4. Оцените число рёбер в этом графе.

5. Найдите оптимальную конфигурацию для страны, чьи города расположены в вершинах прямоугольника; в вершинах других многоугольников.

6. Оцените длину оптимальной системы дорог для произвольной конфигурации; для городов, находящихся в вершинах выпуклого многоугольника. Оптимальна ли Ваша оценка?

7. Верно ли, что Ваши необходимые условия реализации графа в качестве оптимальной системы дорог являются достаточными.

8. Обобщите и решите задачу, когда точки лежат на сфере, а дороги проходят по дугам больших окружностей. Рассмотрите случай других метрических пространств.

Задача 3. Различные расстояния

Рассмотрим M некоторое множество точек в k-мерном пространстве. Пусть $D(M) = |\{r = dist\,(x_i, x_j)\,|x_i, x_j \in M;\; x_i \neq x_j\}|$ - количество различных расстояний между точками множества M. Определим теперь $D_k(n) = \min\limits_{\substack{|M|=n \\ M\subset\mathbb{R}^k}} D(M)$. К примеру, $D_2(3) = 1$.

1. Найдите $D_2(4), D_2(5), D_2(6)$.

2. Оцените последовательность $D_2(n)$ сверху и снизу.

3. Решите пункты 1 и 2 в трёхмерном пространстве.

4. Найдите $D_n(n+2), D_n(n+3), D_n(n+4)$.

5. Верно ли, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(n+c)$ для любого натурального c. Если да, то чему он равен?

6. Рассмотрите предыдущий вопрос для последовательности $D_n(cn^k)$ при фиксированных c и k.

7. Верно ли, что $D_k(n)$ и $D_k(n+1)$ обязаны отличаются не более чем на 1?

8. Предложите верхнюю и нижнюю оценки для $D_k(n)$ при фиксированных k.

9. Обобщите задачу на другие пространства. Попробуйте оценить число различных конфигураций, при которых достигается минимум (с точностью до движений и подобия).

Задача 4. Циркуляции

Пусть G - неориентированный граф со множеством рёбер E и множеством вершин V. При этом будем допускать в графе G кратные рёбра и петли. Введём множество $\overline{E} = \{(e,x,y)|e \in E;\ x,y \in V;\ x \text{ и } y \text{ концы ребра } e\}$, каждый элемент которого задаёт ребро с выбранной ориентацией. Целочисленной циркуляцией на графе G назовём функцию $f\colon \overline{E} \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющую двум условиям

а) $f(e,x,y) = -f(e,y,x)$.

б) Для любой вершины x $\sum\limits_{\substack{e\colon \exists y \\ (e,x,y)\in\overline{E}}} f(e,x,y) = 0$ (Закон Кирхгофа).

k-циркуляцией для $k \geq 2$ называется циркуляция f , такая что $0 < |f(x)| < k$, $x \in \overline{E}$.

1. Покажите, что если из связного графа G можно убрать одно ребро e, так что граф $G - e$ окажется несвязным(такое ребро будем называть мостом), то на этом графе не существует ни одной k-циркуляции ни для какого k.

2. Покажите, что 2-циркуляция на графе без мостов существует тогда и только тогда, когда степень любой вершины чётна.

3. Назовём потоковым числом графа G наименьшее такое k, что на G есть k-циркуляция. Если такого k нет, будем говорить, что потоковое число равно ∞. Будем обозначать это число как $\eta(G)$. Верно ли, что если в графе нет мостов, то $\eta(G) < \infty$?

4. Найдите $\eta(K_{2n+1})$, для различных n, где K_{2n+1} - полный граф на $2n+1$ вершине.

5. Найдите $\eta(K_4)$. Посчитайте, сколько различных k-циркуляций на K_4.

6. Найдите $\eta(K_{2n})$.

7. Пусть P - граф Петерсена. Покажите, что на этом графе нет 4-циркуляции. Верно ли, что любой граф, на котором нет 4-циркуляции содержит подразбиение графа P.

8. Пусть H - абелева группа. H-циркуляцией называется отображение $f\colon \overline{E} \to H$, удовлетворяющее условиям а) и б). Исследуйте количество H-циркуляций на различных графах. Напишите оценку количества H-циркуляций для конечной группы H.

Задача 5. Календарь

Рассмотрим окружность радиуса $n \in \mathbb{N}$ с центром в начале некоторой фиксированной системы координат. Число n назвается календарным, если на этой окружности есть в точности 12 точек с целочисленными координатами.

1. Приведите пример календарных чисел.

2. Бесконечно ли множество календарных чисел?

3. Чему равна плотность множества календарных чисел, то есть предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{0 < n \leq x \,|\, n - \text{ календарное }\}|}{x}.$$

4. Рассмотрите вместо окружностей эллипсы, заданные уравнением $x^2 + qy^2 = n$, где q - натуральное число без квадратов. При каких q есть такое n, что у этого уравнения есть ровно 12 решений.

5. Рассмотрите «циферблатные» числа, где каждой минуте соответствовала бы точка на окружности с целыми координатами.

6. Какое количество целых решений может быть у уравнения $x^2 + qy^2 = n$?

Задача 6. Обобщение теоремы Штейнера-Лемуса

1. Пусть задано вещественное положительное число n. На сторонах AB, BC треугольника ABC отметим точки C_n и A_n соответственно так, что $\frac{|\widehat{BAA_n}|}{|\widehat{CAA_n}|} = \frac{|\widehat{BCC_n}|}{|\widehat{ACC_n}|} = n$, где $|\widehat{CAA_n}|$ обозначает градусную меру угла CAA_n. Известная теорема Штейнера-Лемуса утверждает, что равенство длин биссектрисс $|AA_1| = |CC_1|$ влечет равенство длин сторон $|AB| = |BC|$. Проверьте истинность утверждения: "Отрезки AA_n и CC_n имеют равные длины тогда и только тогда, когда стороны AB и BC имеют равные длины"в каждом из следующих случаев:

   а) $n = 2$

   б) n - произвольное натуральное число.

   в) n - произвольное положительное рациональное число.

   г) n - произвольное положительное вещественное число.

2. Сформулируйте и исследуйте аналогичную задачу, если точки A_n и C_n выбираются на прямых AB, BC соответственно так, что лучи AA_n, C_n делят внешние углы при вершинах A и C треугольника ABC в равных отношениях.

3. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 7. Иррациональные корни рациональных уравнений

1. Известно, что уравнение $x^4+ax^3+29x^2+bx+4=0$ с рациональными коэффициентами имеет корнем число $2+\sqrt{3}$. Найдите остальные корни этого уравнения.

2. Обоснуйте следующий алгоритм нахождения рациональных корней уравнения вида $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ с целыми коэффициентами (если они, конечно, существуют): если x_0 – рациональный корень такого уравнения, то он обязательно равен $x_0=\frac{p}{q}$, где p – делитель свободного члена (т.е. a_0), а q – делитель a_n. Распространите этот алгоритм на такие же уравнения с рациональными коэффициентами.

3. Попробуйте предложить алгоритм определения (с обоснованием) корней вида $a+b\cdot\sqrt{2}, a+b\cdot\sqrt{3}, \ldots$ где $a, b \in Q$, для таких уравнений (по крайней мере, постройте алгоритмы определения таких корней).

4. Может, вы сможете определять корни более сложного вида $a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}$ или $a+b\cdot\sqrt[3]{2}$?

5. Предложите алгоритм определения корней исходя из их общего вида, такого как $a+b\cdot\sqrt{m}$, $a+b\cdot\sqrt{m}+c\cdot\sqrt{k}$ и т.п., где m, k,... – заранее неизвестные натуральные числа.

6. Попробуйте оценить сложность предлагаемых алгоритмов.

7. Рассмотрите корни уравнений еще более сложного вида (с корнями различных степеней или с «композицией» корней и т.п.).

8. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их (например, попробуйте рассмотреть подобные задачи для систем уравнений с двумя и более переменными, а также уравнения с коэффициентами из множества $Q_{\sqrt{2}}=\left\{x+y\cdot\sqrt{2} | x, y \in Q\right\}$.

Задача 8. Функция Эйлера

Пусть n - натуральное число, большее единицы. Обозначим за $\phi(n)$ количество таких целых $0<x<n$, что x взаимно просто с n.

$$\phi(n) = |\{0<x<n | (x,n)=1\}|$$

1. Покажите, что для любого $n \geq 3$ есть такое натуральное число $k(n)$, что

$$\underbrace{\phi(\phi(\cdots\phi(n)))}_{k(n)\text{ раз}} = \phi^{\circ k(n)}(n) = 2.$$

2. Оцените число $k(n)$ сверху и снизу, где

а) n - число вида $\{3^s2^t\}_{s,t\in\mathbb{N}}$.

б) n - есть произведение всех различных простых меньших заданного числа.

в) n - произвольное натуральное число.

3. Рассмотрим уравнение $\phi(n) = m$ относительно n. Оцените число его решений

   а) сверху.

   б) снизу.

4. Обобщите предыдущий пункт на случай уравнений $\phi(\phi(\cdots\phi(n))) = m$. При каких m они разрешимы? Какова плотность множества значений функции $\phi^{\circ k}$, где плотность понимается в смысле задачи 5.

5. Число n назовём совершенным, если $n = \sum\limits_{i=1}^{k(n)+1} \phi^{\circ i}(n)$. Докажите, что числа вида 3^k являются совершенными.

6. Постройте другие примеры совершенных чисел. Существуют ли совершенные числа, не делящиеся на 3? Какие числа не являются совершенными?

Задача 9. Игры с карточками

1. Есть три автомата: первый по карточке с числами (a, b), $a, b \in Z$ выдаёт карточку с числами (a − b, b); второй − карточку (a + b, b); третий − карточку (b, a). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки.

   а) Пусть у вас в начале на руках имеется карточка (19, 86). Можно ли получить карточку а) (31,13); б) (12, 21)?

   б) Попробуйте найти все карточки (x, y), которые можно получить из карточки (19, 86). Докажите, что других карточек получить нельзя.

   в) Пусть у вас имеется карточка с числами (a, b). Попробуйте найти все карточки (x, y), которые можно получить.

2. Есть три автомата: первый по карточке (a, b), $a, b \in N$ выдаёт карточку с числами (a + 1, b + 1); второй − карточку (a/2,b/2) (он работает только тогда, когда a и b чётные); третий − по двум карточкам с числами (a, b) и (b, c) печатает карточку с числами (a, c). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки.

   а) Можно ли с помощью этих операций из карточки (5, 19) получить карточку а) (1,50); б) (1, 100)?

   б) Найдите все натуральные n, такие, что можно из карточки (5, 19) получить карточку (1, n). Докажите, что при остальных натуральных n это сделать не получится.

   в) Определите множество всех карточек (m, n), $m, n \in N$, которые можно получить из карточки (5, 19).

3. Пусть первоначально имеется карточка с числами (a, b), $a, b \in N$, a < b, и автоматы такие же, как в пункте 2.

   а) Для различных пар a, b определите, при каких n можно из заданной карточки (a, b) получить карточку с числами (1, n)? Докажите, что при остальных натуральных n это сделать не получится.

   б) Для различных пар a, b определите множество всех карточек (m, n), $m, n \in N$, которые можно получить из карточки (a, b).

   в) Пусть первоначально имеется набор из k карточек с числами $(a_1, b_1), ..., (a_k, b_k)$. При каких натуральных m и n можно получить карточку с числами (m, n) (конечно, в зависимости от исходного набора карточек)?

4. Придумайте свои обобщения или направления исследования этой задачи и изучите их. Например, рассмотрите систему автоматов, способных выполнять над карточками какие-нибудь другие операции.

Задача 10. Числовые квадраты

Возьмем 9 девятиклеточных квадратов.

1. Можно ли разместить в них натуральные числа от 1 до 9 и затем соединить все 9 квадратов в один квадратный коврик 9×9 так, чтобы:

   а) Сумма чисел по каждой диагонали в любом девятиклеточном варианте равнялась 15.

   б) Сумма чисел в каждом из четырех квадратов 2×2, входящих в состав девятиклеточного квадрата, а также сумма чисел, расположенных в клетках, прилегающих к сторонам центрального квадратика, равнялась 16 в первом девятиклеточном квадрате коврика, 17 - во втором, 18 - в третьем и далее последовательно 19, 20, 21, 22, 23, 24.

   в) В каждом столбце и в каждой строке полного квадрата 9×9 содержались бы все числа от 1 до 9 в произвольной последовательности.

2. Можно ли расположить числа так, чтобы сумма чисел по углам каждого из центральных 3×3, 5×5, 7×7, 9×9 квадратов окажется равной 20?

3. Можно ли расположить числа так, чтобы суммы чисел, расположенных по прямым, симметричным относительно одной из диагоналей полного квадрата 9×9 оказались одинаковыми, и эти суммы по мере удаления от оси симметрии прямых, на которых расположены слагаемые сумм, уменьшались регулярно на 5 единиц?

4. Можно ли расположить числа так, чтобы оказались одинаковыми и суммы квадратов чисел, расположенных вдоль прямых,симметричных относительно той же диагонали полного квадрата?

5. Найдите как можно больше дополнительных числовых свойств у образовавшегося полного квадрата и докажите их.

Предложенная задача не должна обращаться в пустую головоломку со "слепым"подбором решения. Предложите наиболее экономный алгоритм составления требуемого числового квадрата 9×9 и обоснуйте его корректность.

Задача 11. Почти арифметические прогрессии

Попробуйте построить теорию «почти арифметических прогрессий». В качестве исходных направлений исследования могут быть следующие.
Пусть a_1, d_1, d_2, n – фиксированные натуральные числа. Конечную последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, будем называть почти арифметической прогрессией, если для любого k, $2 \leq k \leq n$, $a_k = a_{k-1} + d_1$ или $a_k = a_{k-1} + d_2$. Множество всех таких почти арифметических прогрессий длины n обозначим через $P_n(a_1, d_1, d_2)$.

1. Укажите последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $P_n(a_1, d_1, d_2)$, у которой наименьшее количество членов равняется полусумме своих соседей.
2. Укажите последовательность из $P_n(a_1, d_1, d_2)$, у которой среди чисел $a_1 + a_n, a_2 + a_{n-1}, ...$ наименьшее количество равных между собой.
3. Сколько различных последовательностей содержит множество $P_n(a_1, d_1, d_2)$?
4. Сколько различных сумм может быть у последовательностей из множества $P_n(a_1, d_1, d_2)$?
5. Какое наибольшее количество последовательностей из $P_n(a_1, d_1, d_2)$ имеет одинаковую сумму всех своих членов?
6. Пусть $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$ – множество всех последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_{3n+1}$ таких, что при любом k, $2 \leq k \leq 3n+1$ имеет место одно из равенств $a_k = a_{k-1} + 1$, $a_k = a_{k-1} + 2$, $a_k = a_{k-1} + 3$. У какого наибольшего количества последовательностей из $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$ одинаковая сумма всех членов?
7. Сколько различных последовательностей содержит множество $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$?
8. Предложите свои направления исследования или обобщения этой задачи и изучите их.

Задача 12. Периодические дифференциальные уравнения

1. Дана функция $f(x, y) : R^2 \to R, f \in C(R^2), f'_y \in C(R^2)$ и $f(x + T, y) = f(x, y)$ для любых $(x, y) \in R^2$. Далее, существуют такие числа a, b, что $f(x, a) * f(x, b) < 0$ для любого вещественного x.

   a) Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ имеет T-периодическое решение.

б) Докажите, что если $f'_y > 0$, то это периодическое решение - единственно.

2. Дано уравнение $y' = -y^{2k+1} + f(x)$, $f(x+T) = f(x)$, f - непрерывна на вещественной прямой.

   а) Докажите, что существует T-периодическое решение.

   б) Докажите, что это решение - единственно.

3. Найти все периодические решения уравнения $y' = (y-a)(y-b)$, где a, b - вещественные числа.
   Средним за период для периодической функции f(x) называется величина $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$.
   Ниже везде предполагается, что функции $f, f_1, f_2 \in C(R)$ и T-периодические.

4. Дано уравнение $y' = (y-a)(y-f(x))$.

   а) Найдите необходимое и достаточное условие на среднее за период функции f, при котором это уравнение имеет T-периодическое решение(отличное от константы).

   б) Сколько вообще периодических решений может иметь это уравнение?

5. Те же самые вопросы для уравнения $y' = (y-a)^2(y-f(x))$

6. Проведите исследование уравнения $y' = (y-a)^m(y-f(x))^n$ на предмет существования периодических решений в зависимости от натуральных параметров n,m и величины $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$.